

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

### > Ebenen

**Aufgabe:** Bestimme die Koordinatenform (Koordinatengleichung) der Ebene, die die zwei Spurpunkte  $S_1(5|0|0)$  und  $S_2(0|6|0)$  besitzt.

**Lösung:** I. Allgemeine Vorgehensweise: Sind Punkte  $S_1, S_2, S_3$  (falls vorhanden) Spurpunkte einer zu konstruierenden Ebene  $E$ , gilt also:  $S_1(p|0|0), S_2(0|q|0), S_3(0|0|r)$  (mit reellen  $p, q, r$  und mindestens einer der drei Zahlen  $\neq 0$ ), so lässt sich die Ebene sofort in Koordinatenform (Koordinatengleichung:  $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ ) bestimmen als:

$p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_1(p 0 0), S_2(0 q 0), S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 + \frac{1}{r}x_3 = 1$
$p \neq 0, q \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_1(p 0 0), S_2(0 q 0)$	$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 = 1$
$p \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_1(p 0 0), S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{r}x_3 = 1$
$q \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_2(0 q 0), S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{q}x_2 + \frac{1}{r}x_3 = 1$
$p \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkt $S_1(p 0 0)$	$E: \frac{1}{p}x_1 = 1$ ( $E: x_1 = p$ )
$q \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkt $S_2(0 q 0)$	$E: \frac{1}{q}x_2 = 1$ ( $E: x_2 = q$ )
$r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkt $S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{r}x_3 = 1$ ( $E: x_3 = r$ )

#### Ebenengleichung (Koordinatenform) aus Spurpunkten

Aus den (ein bis drei) Spurpunkten lässt sich also eindeutig die Ebene  $E$  herleiten.

II. Die zwei Punkte  $S_1(5|0|0)$  und  $S_2(0|6|0)$  sind als Achsenabschnittspunkte (jeweils zwei Koordinaten sind 0) Spurpunkte der zu konstruierenden Ebene  $E$  in der Koordinatenform, also:

$$E: \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 1.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner als kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 5 und 6, d.h. mit 30 ergibt:

$$E: 6x_1 + 5x_2 = 30,$$

so dass eine ganzzahlige Darstellung der Ebenengleichung folgt. Wegen der fehlenden  $x_3$ -Komponente in der Ebenengleichung ist die Ebene  $E$  zudem parallel zur  $x_3$ -Achse. Es ergibt sich also die nebenstehend eingezeichnete Lage der Ebene im  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem.

