Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenenschar

Aufgabe: Gegeben sei die Ebenenschar:

$$E_a: (a+2)x_1 + (2a-1)x_2 + 4x_3 = 2{,}5a^2 + 10{,}5$$

für alle reellen Zahlen a. Der Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems soll um jede Ebene E_a gespiegelt. Zeige, dass die Bildpunkte des Koordinatenursprungs eine Gerade bilden.

Lösung: I. Gegeben sei für jedes reelle a die Ebene E_a: $(a+2)x_1 + (2a-1)x_2 + 4x_3 = 2{,}5a^2 + 10{,}5$ der Ebenenschar. Der Normalenvektor der Ebene lautet: $\overset{->}{n_a} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und ist der Richtungsvektor der <u>Lotgeraden</u> h_a durch den Koordinatenursprung: h_a: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-1 \\ 4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

II. Die Lotgerade h_a schneidet die Ebene E_a senkrecht im <u>Lotfußpunkt</u> F_a(1+0,5a|-0,5+a|2) vermöge:

Gerade h_a -> $x_1 = t(a+2)$, $x_2 = t(2a-1)$, $x_3 = 4t$ -> Ebene E_a ->
$(a+2)\cdot t(a+2) + (2a-1)\cdot t(2a-1) + 4\cdot 4t = 2{,}5a^2 + 10{,}5 \Leftrightarrow t(a+2)^2 + t(2a-1)^2 + 16\,t = 2{,}5a^2 + 10{,}5 \Leftrightarrow$
$t[(a^2+4a+4)+(4a^2-4a+1)+16] = 2{,}5a^2 + 10{,}5 \Leftrightarrow t(5a^2+21) = 2{,}5a^2 + 10{,}5 \Leftrightarrow t = \frac{2{,}5a^2+10{,}5}{5a^2+21} = \frac{1}{2}$ ->

$\overset{->}{OF_a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5a+1 \\ a-0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> Lotfußpunkt F_a(1+0,5a|-0,5+a|2).

III. Für jedes reelle a ergibt sich auf der Grundlage der Spiegelformel $\overset{->}{OP'} = 2\cdot\overset{->}{OF} - \overset{->}{OP}$ mit P als Urbild-, P‘ als Bild-, und F als Lotfußpunkt der <u>Bildpunkt</u> O'_a des Koordinatenursprungs:

$\overset{->}{OO_a'} = 2\cdot\overset{->}{OF_a} = 2\cdot\begin{pmatrix} 0{,}5a+1 \\ a-0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-1 \\ 4 \end{pmatrix}$ -> Bildpunkt O'_a(a+2|2a-1|4).

IV. Alle Bildpunkte O'_a(a+2|2a-1|4) liegen auf einer <u>Geraden</u> g wegen:

g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

www.michael-buhlmann.de / 07.2024 / Aufgabe 2177