Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Lagebeziehungen von Ebene und Geraden

Aufgabe: Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ E: } 2x_1 + x_2 = 4.$$

Untersuche die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E gegebenenfalls unter Angabe des Schnittpunkts S zwischen Gerade und Ebene.

Lösung: I. Eine Gerade g und eine Ebene E können im dreidimensionalen x_1-x_2-x_3-Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) g und E schneiden sich in einem Schnittpunkt S; b) g und E sind parallel, ohne dass g auf/in E liegt; c) g liegt auf/in E. Feststellen lässt sich die jeweilige Lagebeziehung, indem die Koordinaten x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung g in die Koordinatenform der Ebenengleichung E eingesetzt werden. Es entsteht eine lineare Gleichung (*) mit dem Geradenparameter t, für die eine der folgenden Aussagen bzw. Lagebeziehungen gültig ist:

a) Die Gleichung (*) ist eindeutig lösbar mit Lösung $t = t_0$, Gerade g und Ebene E schneiden sich im Schnittpunkt S, der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung g berechnet wird.
b) Bei der Berechnung der Gleichung (*) fällt der Parameter t weg, die Gleichung führt auf einen Widerspruch, Gerade g und Ebene E sind parallel, ohne dass g auf/in E liegt.
c) Bei der Berechnung der Gleichung (*) fällt der Parameter t weg, die Gleichung führt auf eine allgemein gültige Aussage, die Gerade g liegt auf/in der Ebene E.

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Geraden g in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$\text{Gerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ -> } x_1 = 1,\ x_2 = t,\ x_3 = 0.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung g in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung bzw. Aussage mit bzw. ohne Parameter t:

Ebene E: $2x_1 + x_2 = 4$ -> $2 \cdot 1 + t = 4$ (*).

Umformen der Gleichung (*) (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$2 \cdot 1 + t = 4 \Leftrightarrow 2 + t = 4 \Leftrightarrow t = 2$.

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene: Die Gerade g und die Ebene schneiden sich in einem Schnittpunkt S. Der Schnittpunkt S lautet:

$$\text{Parameter } t = 2 \text{ -> } \vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ -> Schnittpunkt S(1|2|0).}$$

III. Die nachstehende Grafik zeigt die Lagebeziehung zwischen Gerade g und Ebene E im dreidimensionalen x_1-x_2-x_3-Vektorraum: