

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Lagebeziehungen von Ebene und Geraden

Aufgabe: Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$$

Untersuche die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E gegebenenfalls unter Angabe des Schnittpunkts S zwischen Gerade und Ebene.

Lösung: I. Eine Gerade g und eine Ebene E können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) g und E schneiden sich in einem Schnittpunkt S ; b) g und E sind parallel, ohne dass g auf/in E liegt; c) g liegt auf/in E . Feststellen lässt sich die jeweilige Lagebeziehung, indem die Koordinaten x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung g in die Koordinatenform der Ebenengleichung E eingesetzt werden. Es entsteht eine lineare Gleichung (*) mit dem Geradenparameter t , für die eine der folgenden Aussagen bzw. Lagebeziehungen gültig ist:

- a) Die Gleichung (*) ist eindeutig lösbar mit Lösung $t = t_0$, Gerade g und Ebene E schneiden sich im Schnittpunkt S , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung g berechnet wird.
- b) Bei der Berechnung der Gleichung (*) fällt der Parameter t weg, die Gleichung führt auf einen Widerspruch, Gerade g und Ebene E sind parallel, ohne dass g auf/in E liegt.
- c) Bei der Berechnung der Gleichung (*) fällt der Parameter t weg, die Gleichung führt auf eine allgemein gültige Aussage, die Gerade g liegt auf/in der Ebene E .

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Geraden g in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$\text{Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = t, x_2 = -2 - t, x_3 = 1.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung g in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung bzw. Aussage mit bzw. ohne Parameter t :

$$\text{Ebene } E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \rightarrow 2 \cdot t + 2(-2 - t) + 1 = 4 \text{ (*)}$$

Umformen der Gleichung (*) (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$2 \cdot t + 2(-2 - t) + 1 = 4 \Leftrightarrow -3 = 4 \text{ (Widerspruch).}$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene: Die Gerade g liegt parallel zur Ebene E (und nicht auf/in der Ebene).

III. Die nachstehende Grafik zeigt die Lagebeziehung zwischen Gerade g und Ebene E im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum:

