

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Lagebeziehungen von Ebene und Gerade

Aufgabe: Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, E: x_1 + 2x_2 - x_3 = -2.$$

Untersuche die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E gegebenenfalls unter Angabe von Schnittpunkt S und -winkel φ bzw. des Abstands zwischen Gerade und Ebene.

Lösung: I. Eine Gerade g und eine Ebene E können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) g und E schneiden sich in einem Schnittpunkt S; b) g und E sind parallel, ohne dass g auf/in E liegt; c) g liegt auf/in E. Feststellen lässt sich die jeweilige Lagebeziehung, indem die Koordinaten x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung g in die Koordinatenform der Ebenengleichung E eingesetzt werden. Es entsteht eine lineare Gleichung (*) mit dem Geradenparameter t, für die eine der folgenden Aussagen bzw. Lagebeziehungen gültig ist:

- a) Die Gleichung (*) ist eindeutig lösbar mit Lösung $t = t_0$, Gerade g und Ebene E schneiden sich im Schnittpunkt S, der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung g berechnet wird.
- b) Bei der Berechnung der Gleichung (*) fällt der Parameter t weg, die Gleichung führt auf einen Widerspruch, Gerade g und Ebene E sind parallel, ohne dass g auf/in E liegt.
- c) Bei der Berechnung der Gleichung (*) fällt der Parameter t weg, die Gleichung führt auf eine allgemein gültige Aussage, die Gerade g liegt auf/in der Ebene E.

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Geraden g in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$\text{Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 4 + 2t, x_2 = -3 + t, x_3 = 1 + 5t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung g in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung bzw. Aussage mit bzw. ohne Parameter t:

$$\text{Ebene } E: x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \rightarrow (4 + 2t) + 2(-3 + t) - (1 + 5t) = -2 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung (*) (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$(4 + 2t) + 2(-3 + t) - (1 + 5t) = -2 \Leftrightarrow -3 - t = -2 \Leftrightarrow -t = 1 \Leftrightarrow t = -1.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene: Die Gerade g und die Ebene schneiden sich in einem Schnittpunkt S. Der Schnittpunkt S lautet:

$$\text{Parameter } t = -1 \rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Schnittpunkt } S(2|-4|-4).$$

III. Im Fall, dass sich eine Gerade g und eine Ebene E in einem Schnittpunkt S schneiden, lässt sich auch ein Schnittwinkel φ berechnen. Und zwar gilt:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

mit $\vec{u}$ als Richtungsvektor der Geraden, $\vec{n}$ als Normalenvektor der Ebene.

IV. Wir berechnen auf Grund von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Kosinus des Schnittwinkels und den Schnittwinkel φ :

$$\cos \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{6}} = 0.074536 \rightarrow \varphi = \cos^{-1}(0.074536) = 4.27^\circ.$$