Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen/Punkte

Aufgabe: Bestimme den Abstand des Punktes P(5|5|3) zur Ebene E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$.

1. Lösung: I. Allgemein gilt die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

1) Zu einer vorgegebenen Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ in Koordinatenform und einem vorgegebenen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird eine auf der Ebene E senkrecht stehende (Lot-) Gerade h durch den Punkt P gebildet. Die (Hilfs-) Gerade ist damit von der Form: h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit dem Ortsvektor von P als Stützvektor und dem Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor (der Normalenvektor steht ja senkrecht zur Ebene).

2) Gerade h und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F, dem Ebenenpunkt, der wegen der Orthogonalität von Gerade und Ebene den kürzesten Abstand zum Punkt P besitzt. Einsetzen der Komponenten $x_1 = p_1 + ta$, $x_2 = p_2 + tb$, $x_3 = p_3 + tc$ der Geraden h in die Koordinatenform der Ebene E führt auf die Gleichung:

$a(p_1 + ta) + b(p_2 + tb) + c(p_3 + tc) = d \Leftrightarrow$
$t(a^2+b^2+c^2) + (ap_1+bp_2+cp_3) = d \Leftrightarrow$
$t(a^2+b^2+c^2) = d - (ap_1+bp_2+cp_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [d - ap_1 - bp_2 - cp_3]/\,(a^2+b^2+c^2)$

mit existierendem Parameter t_0. Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(p_1+t_0a|p_2+t_0b|p_3+t_0c)$ auf der Geraden h gemäß: $\vec{OF} = \vec{OP} + t_0\,\vec{n} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t_0\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3) Der Abstand zwischen der Ebene E und dem Punkt P kann nun ermittelt werden als Betrag des Differenzvektors zwischen den Punkten P und F. Für den Abstand gilt dann:

d(P,E) = d(P,F) =

$$\left|\vec{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} p_1 + t_0a - p_1 \\ p_2 + t_0b - p_2 \\ p_3 + t_0c - p_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} t_0a \\ t_0b \\ t_0c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(t_0a)^2 + (t_0b)^2 + (t_0c)^2} = \sqrt{t_0^2(a^2+b^2+c^2)} = |t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

also:

d(P,E) = $|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (*)

mit: $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ als Betrag des Normalenvektors der Ebene E.

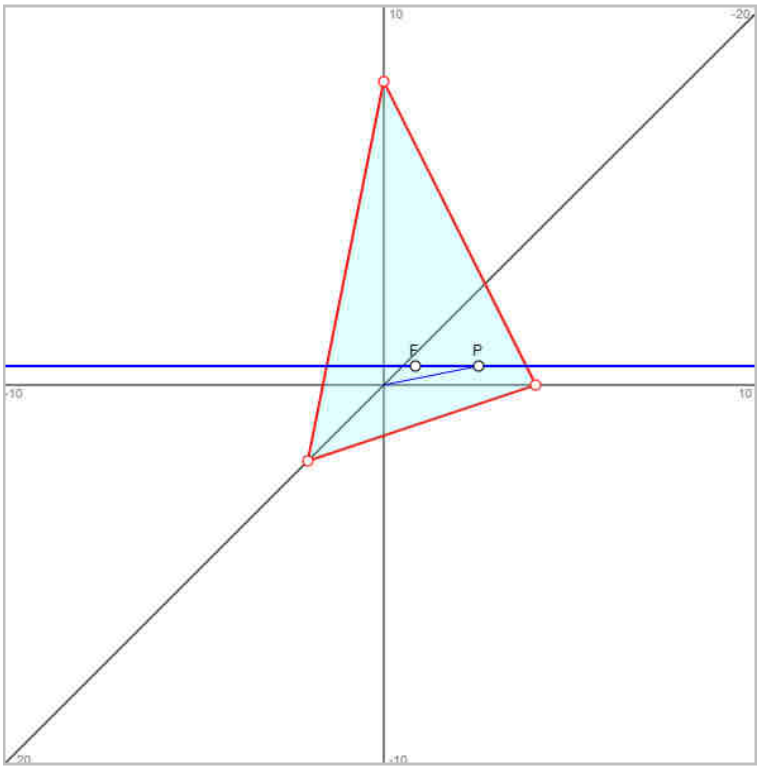
II. Der Normalenvektor der Ebene $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ lautet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, die zur Ebene senkrechte <u>Lotgerade</u> h durch den Punkt P(5|5|3) heißt: h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der <u>Lotfußpunkt</u> F als Schnittpunkt von Gerade und Ebene errechnet sich mit:

Gerade h -> Koordinaten: $x_1 = 5 + 2t$, $x_2 = 5 + 2t$, $x_3 = 3 + t$ -> Ebene E (Einsetzen der Koordinaten) -> $2(5+2t) + 2(5+2t) + (3+t) = 8 \Leftrightarrow 10 + 4t + 10 + 4t + 3 + t = 8 \Leftrightarrow 9t + 23 = 8 \Leftrightarrow 9t = -15 \Leftrightarrow t = -5/3$

-> Gerade h (Einsetzen von t = -5/3) -> $\vec{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ -> Lotfußpunkt F(5/3|5/3|4/3).

Als <u>Abstand</u> zwischen Punkt P und Ebene E ergibt sich mit Hilfe des Lotfußpunktes F:

$$d(P,E) = d(P,F) = \left|\vec{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{9}} = \frac{15}{3} = 5 \text{ LE.}$$



III. Kürzer geht es mit der Formel (*), ohne dass der Lotfußfunkt zu errechnen wäre (es kommt laut Aufgabenstellung ja nur darauf an, den Abstand auszurechnen). Dann gilt mit $t = t_0 = -5/3$:

$$d(P,E) = \left|-\frac{5}{3}\right|\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5 \text{ LE}$$

für den gesuchten <u>Abstand</u>.

2. Lösung: I. Überlegungen zur (relativen) Lage eines Punktes P zu einer Ebene E münden ein in eine Abstandsformel, wonach sich der Abstand d(P,E) zwischen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ letztlich auf der Differenz $ap_1 + bp_2 + cp_3 - d$ gründet, deren Betrag $|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|$ und dessen Normierung durch den Betrag des Normalenvektors der Ebene $\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Es gilt damit die (den absoluten Abstand in Längeneinheiten [LE] messende) Abstandsformel, die sog. Hessesche Normalform:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

II. Anwendung der Hesseschen Normalform durch Einsetzen des Punktes P(5|5|3) und der Ebene E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ in die obige Formel ergibt:

$$d(P,E) = \frac{|2\cdot 5 + 2\cdot 5 + 1\cdot 3 - 8|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{|15|}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ LE}$$

für den gesuchten Abstand.

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1715