

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Lage von Punkt und Ebene zueinander

Aufgabe: Gegeben sind der Punkt $P(2|-2|-8)$ und die Ebene E mit:

$$E: 3x_2 + 4x_3 = 12.$$

Berechne den Abstand zwischen Punkt und Ebene.

Lösung: I. Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und eine Ebene $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) P liegt auf/in E (Punktprobe); b) P liegt nicht auf/in E (Berechnung des Abstands). Aus Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich die Lotgerade $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Lotgeraden l in die Koordinatengleichung der Ebene E führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in t mit Lösung $t = t_0$, Lotgerade l und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung l berechnet wird. Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E ist somit: $d(P,E) = d(P,F) = |\vec{PF}|$.

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden l erstellt auf der Grundlage des Punktes $P(2|-2|-8)$ und der

Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 12$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade l wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$x_1 = 2, x_2 = -2 + 3t, x_3 = -8 + 4t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung l in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter t :

$$\text{Ebene } E: 3x_2 + 4x_3 = 12 \rightarrow 3(-2 + 3t) + 4(-8 + 4t) = 12 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung $(*)$ (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$3(-2 + 3t) + 4(-8 + 4t) = 12 \Leftrightarrow -38 + 25t = 12 \Leftrightarrow 25t = 50 \Leftrightarrow t = 2.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade l und die Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F . Der Lotfußpunkt F lautet:

$$\text{Parameter } t = 2 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(2|4|0).$$

III. Mit dem Punkt $P(2|-2|-8)$ und dem Lotfußpunkt $F(2|4|0)$ berechnet sich der Abstand zwischen Punkt und Ebene als:

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Der gesuchte Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 10$ LE. Der Punkt P liegt nicht auf/in der Ebene E .

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)