

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Lage von Punkt und Ebene zueinander

Aufgabe: Gegeben sind der Punkt $P(3|-1|2)$ und die Ebene E mit:

$$E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3.$$

Berechne den Abstand zwischen Punkt und Ebene.

1. Lösung: I. Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und eine Ebene $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) P liegt auf/in E (Punktprobe); b) P liegt nicht auf/in E (Berechnung des Abstands). Aus Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich die Lotgerade $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Lotgeraden l in die Koordinatengleichung der Ebene E führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in t mit Lösung $t = t_0$, Lotgerade l und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung l berechnet wird. Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E ist somit: $d(P,E) = d(P,F) = |\vec{PF}|$.

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden l erstellt auf der Grundlage des Punktes $P(3|-1|2)$ und der Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade l wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$x_1 = 3 + 2t, x_2 = -1 - 2t, x_3 = 2 - t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung l in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter t :

$$\text{Ebene } E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \rightarrow 2(3 + 2t) - 2(-1 - 2t) - (2 - t) = -3 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung $(*)$ (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$2(3 + 2t) - 2(-1 - 2t) - (2 - t) = -3 \Leftrightarrow 6 + 9t = -3 \Leftrightarrow 9t = -9 \Leftrightarrow t = -1.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade l und die Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F . Der Lotfußpunkt F lautet:

$$\text{Parameter } t = -1 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(1|1|3).$$

III. Mit dem Punkt $P(3|-1|2)$ und dem Lotfußpunkt $F(1|1|3)$ berechnet sich der Abstand zwischen Punkt und Ebene als:

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Der gesuchte Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 3$ LE. Der Punkt P liegt nicht auf/in der Ebene E .

2. Lösung: I. Die Abstandsberechnung zwischen einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und einer Ebene $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) im dreidimensionalen reellen Vektorraum erfolgt mit Hilfe der Hesseschen Normalform:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

II. Einsetzen von Punkt $P(3|-1|2)$ in die Hessesche Normalform der Ebenengleichung $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3$ ergibt:

$$d(P,E) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 2 - (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 3$ LE.

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)