

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Lage von Punkt und Ebene zueinander

Aufgabe: Gegeben sind der Punkt $P(8|18|32)$ und die Ebene E mit:

$$E: x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 12.$$

Berechne den Abstand zwischen Punkt und Ebene.

1. Lösung: I. Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und eine Ebene $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) P liegt auf/in E (Punktprobe); b) P liegt nicht auf/in E (Berechnung des Abstands). Aus Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich die Lotgerade $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Lotgeraden l in die Koordinatengleichung der Ebene E führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in t mit Lösung $t = t_0$, Lotgerade l und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung l berechnet wird. Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E ist somit: $d(P,E) = d(P,F) = |\vec{PF}|$.

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden l erstellt auf der Grundlage des Punktes $P(8|18|32)$ und der Ebene $E: x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 12$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade l wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$x_1 = 8 + t, x_2 = 18 + 4t, x_3 = 32 + 8t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung l in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter t :

$$\text{Ebene } E: x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 12 \rightarrow (8 + t) + 4(18 + 4t) + 8(32 + 8t) = 12 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung $(*)$ (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$(8 + t) + 4(18 + 4t) + 8(32 + 8t) = 12 \Leftrightarrow 336 + 81t = 12 \Leftrightarrow 81t = -324 \Leftrightarrow t = -4.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade l und die Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F . Der Lotfußpunkt F lautet:

$$\text{Parameter } t = -4 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(4|2|0).$$

III. Mit dem Punkt $P(8|18|32)$ und dem Lotfußpunkt $F(4|2|0)$ berechnet sich der Abstand zwischen Punkt und Ebene als:

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -32 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-16)^2 + (-32)^2} = \sqrt{1296} = 36.$$

Der gesuchte Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 36$ LE. Der Punkt P liegt nicht auf/in der Ebene E .

2. Lösung: I. Die Abstandsberechnung zwischen einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und einer Ebene $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) im dreidimensionalen reellen Vektorraum erfolgt mit Hilfe der Hesseschen Normalform:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

II. Einsetzen von Punkt $P(8|18|32)$ in die Hessesche Normalform der Ebenengleichung $E: x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 12$ ergibt:

$$d(P,E) = \frac{|8 + 4 \cdot 18 + 8 \cdot 32 - 12|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{|324|}{\sqrt{81}} = \frac{324}{9} = 36.$$

Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 36$ LE.

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)