

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Lage von Punkt und Ebene zueinander

Aufgabe: Gegeben sind der Punkt $P(-18|35|18)$ und die Ebene E mit:

$$E: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 16.$$

Berechne den Abstand zwischen Punkt und Ebene.

1. Lösung: I. Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und eine Ebene $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) P liegt auf/in E (Punktprobe); b) P liegt nicht auf/in E (Berechnung des Abstands). Aus Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich die Lotgerade $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Lotgeraden l in die Koordinatengleichung der Ebene E führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in t mit Lösung $t = t_0$, Lotgerade l und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung l berechnet wird. Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E ist somit: $d(P,E) = d(P,F) = |\vec{PF}|$.

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden l erstellt auf der Grundlage des Punktes $P(-18|35|18)$ und der Ebene $E: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 16$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$. Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 35 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade l wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$x_1 = -18 + 4t, x_2 = 35 - 7t, x_3 = 18 - 4t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung l in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter t :

$$\text{Ebene } E: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 16 \rightarrow 4(-18 + 4t) - 7(35 - 7t) - 4(18 - 4t) = 16 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung $(*)$ (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$4(-18 + 4t) - 7(35 - 7t) - 4(18 - 4t) = 16 \Leftrightarrow -389 + 81t = 16 \Leftrightarrow 81t = 405 \Leftrightarrow t = 5.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade l und die Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F . Der Lotfußpunkt F lautet:

$$\text{Parameter } t = 5 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} -18 \\ 35 \\ 18 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(2|0|-2).$$

III. Mit dem Punkt $P(-18|35|18)$ und dem Lotfußpunkt $F(2|0|-2)$ berechnet sich der Abstand zwischen Punkt und Ebene als:

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 35 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 20 \\ -35 \\ -20 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20^2 + (-35)^2 + (-20)^2} = \sqrt{2025} = 45.$$

Der gesuchte Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 45$ LE. Der Punkt P liegt nicht auf/in der Ebene E .

2. Lösung: I. Die Abstandsberechnung zwischen einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und einer Ebene $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) im dreidimensionalen reellen Vektorraum erfolgt mit Hilfe der Hesseschen Normalform:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

II. Einsetzen von Punkt $P(-18|35|18)$ in die Hessesche Normalform der Ebenengleichung $E: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 16$ ergibt:

$$d(P,E) = \frac{|4 \cdot (-18) - 7 \cdot 35 - 4 \cdot 18 - 16|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-4)^2}} = \frac{|-405|}{\sqrt{81}} = \frac{405}{9} = 45.$$

Der Abstand zwischen Punkt P und Ebene E beträgt damit: $d(P,E) = 45$ LE.

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)