

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Einheitsvektor

Aufgabe: Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.3 \end{pmatrix}$ im dreidimensionalen Vektorraum. Berechne den Betrag des Vektors und den Einheitsvektor, zeichne Vektor und Einheitsvektor in ein passendes x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem.

Lösung: I. Allgemein gilt: Zu einem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ berechnet sich der Betrag (Länge) des Vektors als:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

und daraus der Einheitsvektor:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \end{pmatrix}.$$

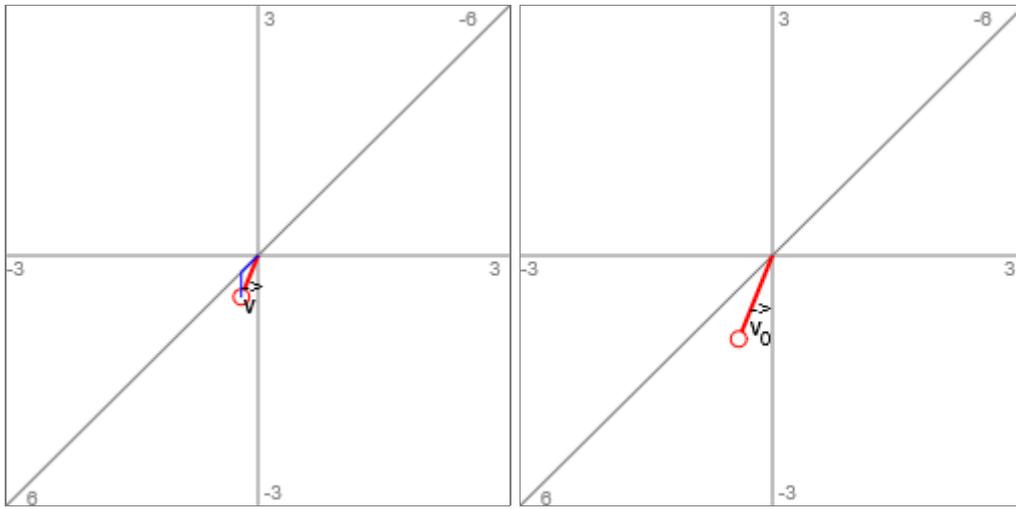
II. Wir berechnen zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.3 \end{pmatrix}$ den Betrag (Länge) des Vektors wie folgt:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0.4^2 + 0^2 + (-0.3)^2} = \sqrt{0.25} = 0.5 \text{ LE (Längeneinheiten)}.$$

Für den Einheitsvektor ergibt sich dann:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{1}{0.5} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ -0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.4}{0.5} \\ \frac{0}{0.5} \\ \frac{-0.3}{0.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix}.$$

III. Grafisch lassen sich Vektor \vec{v} und Einheitsvektor \vec{v}_0 im x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem darstellen als:



(Abbildung links: Vektor; Abbildung rechts: Einheitsvektor).