

# Mathematikaufgaben

## > Algebra

## > Exponentialgleichungen

---

**Aufgabe:** Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung:

$$(e^{x+4})^2 = 6e^{x+8}.$$

**Lösung:** I. Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Exponenten steht. Die Basis der Potenz ist die Eulersche Zahl  $e$ . Allgemein gilt für das Lösen von einfachen Exponentialgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen  $x$ , die folgende Vorgehensweise: Einfache Exponentialgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen  $x$ , die der Form  $ae^{kx+l} - b = 0$  bzw.  $ae^{kx+l} = b$  (\*) mit reellen Zahlen  $a, b, k, l$  genügen. Die Lösung

der Gleichung (\*) ist für  $a \cdot b > 0, k \neq 0$  dann:  $x = \frac{1}{k} \left( \ln\left(\frac{b}{a}\right) - l \right)$ . Um die Lösung einer Gleichung

der Form (\*) zu erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung. Insbesondere ist die Gleichung (\*) in die Form  $e^{kx+l} = b/a$  zu bringen, so dass Logarithmieren mit dem natürlichen Logarithmus  $\ln()$  zu:  $kx+l = \ln(b/a)$  führt.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen und dem natürlichen Logarithmieren wie folgt vor:

$$\begin{aligned} (e^{x+4})^2 &= 6e^{x+8} && | \text{Anwendung der Potenzgesetze: } (a^n)^m = a^{nm}, a^{n+m} = a^n \cdot a^m \\ e^{2x+8} &= 6e^8 e^x && | \text{Anwendung des Potenzgesetzes: } a^{n+m} = a^n \cdot a^m \\ e^8 e^{2x} &= 6e^8 e^x && | :e^8 \\ e^{2x} &= 6e^x && | :e^x \text{ (möglich, da } e^x > 0) \\ e^x &= 6 && | \ln() \\ x &= \ln 6 \end{aligned}$$

Wir erhalten den Wert  $x = \ln 6$  als Lösung; Lösungsmenge ist also:  $L = \{ \ln 6 \}$ .