

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Exponentialgleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung:

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0.$$

Lösung: I. Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Exponenten steht. Die Basis der Potenz ist die Eulersche Zahl e . Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Exponentialgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x , die folgende Vorgehensweise: Quadratische Exponentialgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x , die der Form $ae^{2kx} + be^{kx} + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, k genügen. Die Lösung der Gleichung (*) erfolgt zunächst mittels Substitution $z = e^{kx}$, so dass die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ (**) entsteht. Die Gleichung (**) ist mit der a-b-c- oder p-q-Formel nach z aufzulösen. Besitzt die Gleichung (**) Lösungen der Form $z = z_0$, so ergibt die Rücksubstitution $e^{kx} = z$ die Beziehung $e^{kx} = z_0$. Für $z_0 > 0$ gilt dann: $x = \frac{1}{k} \ln z_0$. Um die Lösung einer Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind zudem Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen, Substitution, Rücksubstitution und dem natürlichen Logarithmieren wie folgt vor:

$e^{2x} - e^x - 2 = 0$	Substitution: $z = e^x$
$z^2 - z - 2 = 0$	p-q-Formel
$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$	Ausrechnen
$z = -1 \mid z = 2$	Rücksubstitution: $e^x = z$
$[e^x = -1] \mid e^x = 2$	$\ln()$
$[keine Lösung] \mid x = \ln 2$	

Wir erhalten den Wert $x = \ln 2$ als Lösung; Lösungsmenge ist also: $L = \{ \ln 2 \}$.