Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Exponentialgleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung:

$$e^x + 21e^{-x} = 10\,.$$

Lösung: I. Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Exponenten steht. Die Basis der Potenz ist die Eulersche Zahl e. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Exponentialgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Quadratische Exponentialgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ae^{2kx} + be^{kx} + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, k genügen. Die Lösung der Gleichung (*) erfolgt zunächst mittels Substitution $z = e^{kx}$, so dass die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ (**) entsteht. Die Gleichung (**) ist mit der a-b-c- oder p-q-Formel nach z aufzulösen. Besitzt die Gleichung (**) Lösungen der Form $z = z_0$, so ergibt die Rücksubstitution $e^{kx} = z$ die Beziehung $e^{kx} = z_0$. Für $z_0 > 0$ gilt dann: $x = \frac{1}{k}\ln z_0$. Um die Lösung einer Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind zudem Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen, Substitution, Rücksubstitution und dem natürlichen Logarithmieren wie folgt vor:

$e^x + 21e^{-x} = 10$	$\mid \cdot e^x$
$e^{2x} + 21 = 10e^x$	$\mid -10e^x$
$e^{2x} - 10e^x + 21 = 0$	| Substitution: $z = e^x$
$z^2 - 10z + 21 = 0$	| p-q-Formel
$z = 5 \pm \sqrt{25-21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2$	| Ausrechnen
$z = 3 \mid z = 7$	| Rücksubstitution: $e^x = z$
$e^x = 3 \mid e^x = 7$	| ln()
$x = \ln 3 \mid x = \ln 7$	

Wir erhalten die Werte $x = \ln 3$ und $x = \ln 7$ als Lösungen; Lösungsmenge ist also die Zahlenmenge: L = $\{\ln 3,\ \ln 7\}$.

www.michael-buhlmann.de / 02.2015 / Aufgabe 105