

# Mathematikaufgaben

## > Algebra

## > Exponentialgleichungen

---

**Aufgabe:** Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung:

$$2e^{2x} - 3e^x - 20 = 0.$$

**Lösung:** I. Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Exponenten steht. Die Basis der Potenz ist die Eulersche Zahl  $e$ . Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Exponentialgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen  $x$ , die folgende Vorgehensweise: Quadratische Exponentialgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen  $x$ , die der Form  $ae^{2kx} + be^{kx} + c = 0$  (\*) mit reellen Zahlen  $a, b, c, k$  genügen. Die Lösung der Gleichung (\*) erfolgt zunächst mittels Substitution  $z = e^{kx}$ , so dass die quadratische Gleichung  $az^2 + bz + c = 0$  (\*\*) entsteht. Die Gleichung (\*\*) ist mit der a-b-c- oder p-q-Formel nach  $z$  aufzulösen. Besitzt die Gleichung (\*\*) Lösungen der Form  $z = z_0$ , so ergibt die Rücksubstitution  $e^{kx} = z$  die Beziehung  $e^{kx} = z_0$ . Für  $z_0 > 0$  gilt dann:  $x = \frac{1}{k} \ln z_0$ . Um die Lösung einer Gleichung der Form (\*) zu erlangen, sind zudem Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punkt-rechnung.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen, Substitution, Rücksubstitution und dem natürlichen Logarithmieren wie folgt vor:

$$\begin{array}{ll} 2e^{2x} - 3e^x - 20 = 0 & | \text{ Substitution: } z = e^x \\ 2z^2 - 3z - 20 = 0 & | \text{ a-b-c-Formel} \\ z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4} & | \text{ Ausrechnen} \\ z = -2,5 \mid z = 4 & | \text{ Rücksubstitution: } e^x = z \\ [e^x = -2,5] \mid e^x = 4 & | \ln() \\ [\text{keine Lösung}] \mid x = \ln 4 & \end{array}$$

Wir erhalten den Wert  $x = \ln 4$  als Lösung; Lösungsmenge ist also:  $L = \{\ln 4\}$ .