Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

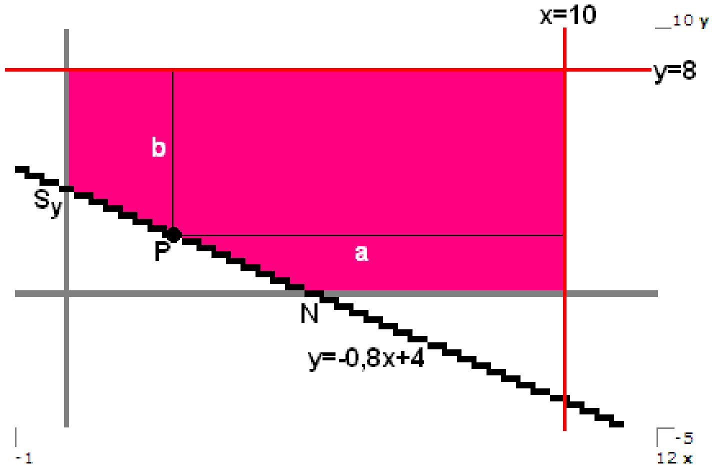
Aufgabe: a) Im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems wird eine Fläche durch die Achsen des Koordinatensystems und die Geraden x = 10 und y = 8 sowie die Gerade durch die Punkte $S_y(0|4)$ und N(5|0) begrenzt. Aus der Fläche soll achsenparalleles Rechteck maximaler Fläche ausgeschnitten werden. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt, wie heißen die Ecken des Rechtecks maximaler Fläche?

b) Wo muss die Nullstelle N der Geraden durch $S_y(0|4)$ und N liegen, damit eine Seite des flächenmaximalen Rechtecks auf einer Achse des Koordinatensystems liegt?

Lösung: a) I. Die Gerade durch die Punkte $S_y(0|4)$ und N(5|0) (y-Achsenabschnitt, Nullstelle) bestimmt sich vermöge des Ansatzes y = mx + c mit:

$m = \frac{0-4}{5-0} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$ (Steigung als Quotient der Differenzen der x-, y-Werte beider Punkte)

und c = 4 (y-Achsenabschnitt) als: y = -0,8x + 4.



II. Zur Lösung des Extremwertproblems bestimmen wir zunächst einen beliebigen Punkt P(u|y(u)) auf der Gerade y = -0,8x + 4 als: P(u|-0,8u+4), 0≤u≤5. Die Rechteckfläche, deren eine Ecke der allgemeine Punkt P ist, hat den Flächeninhalt A = ab (a = Länge, b = Breite des Rechtecks) und damit wegen:

a = 10 – u
b = 8 – y(u) = 8 – (-0,8u+4) = 8 + 0,8u – 4 = 4 + 0,8u

die Flächeninhaltsfunktion: $A(u) = (10–u)(4+0{,}8u) = 40+8u–4u–0{,}8u^2 = 40+4u-0{,}8u^2$.

III. Wir bestimmen das Maximum der Flächeninhaltsfunktion auf dem Intervall [0; 5] und beachten (eventuelle) lokale und globale Maxima. Wegen der (lokalen) Extremwertbestimmung ist die 1. Ableitung zu bilden als:

A'(u) = 4 – 1,6u

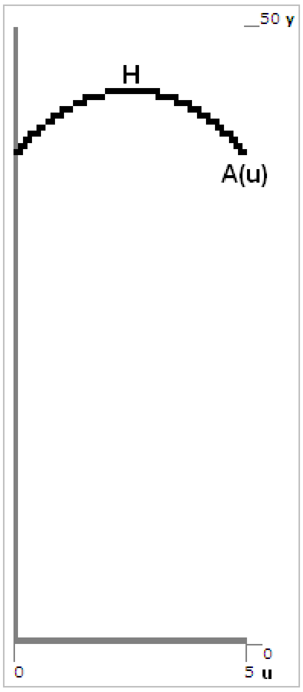
und diese gleich 0 zu setzen:

A'(u) = 0 ⇔ 4 – 1,6u = 0 ⇔ 4 = 1,6u ⇔ u = 2,5

Wegen A''(u) = -1,6 und A''(2,5) = -1,6 < 0 liegt an der Stelle u = 2,5 ε [0; 5] ein (lokaler) Hochpunkt vor mit A(2,5) = 45 (als Flächeninhalt des Rechtecks). Ob der Hochpunkt das globale Maximum der Flächeninhaltsfunktion auf dem Intervall [0; 5] darstellt, muss sich aus der Untersuchung der Randstellen des Intervalls ergeben. In der Tat gilt:

A(0) = 40
A(5) = 40,

so dass wegen der niedrigeren y-Werte der Randpunkte H(2,5|45) globaler Hochpunkt der Flächeninhaltsfunktion A(u) ist.



IV. Zu u = 2,5 bestimmen wir noch die Eckpunkte des Rechtecks maximaler Fläche. Es ist zunächst wegen y(2,5) = -0,8·2,5 + 4 = 2: P(2,5|2), so dass sich Q(10|2), R(10|8) und S(2,5|8) als weitere Eckpunkte des Rechtecks ergeben.

b) I. Wir betrachten allgemein eine Gerade durch den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|4)$, d.h. der Form y = mx + 4. Offensichtlich muss wegen der Verortung des Extremwertproblems im 1. Quadranten des Koordinatensystems die Nullstelle N auf dem positiven Teil der x-Achse liegen, die Steigung m der Geraden also negativ sein (m<0). Offensichtlich hängt es von dieser Steigung ab, ob das Rechteck maximaler Fläche mit einer Seite auf der x- oder y-Achse zu liegen kommt. Ist die Steigung m betragsmäßig „gering“, so ist ein Teil der y-Achse Rechteckseite, ist die Steigung betragsmäßig „groß“, so ein Teil der x-Achse.

II. Ähnlich wie im Aufgabenteil a) bestimmen wir mit y = mx + 4, m<0, und somit dem Punkt P(u|y(u)) = P(u|mu+4) die Rechteckfläche und die Flächeninhaltsfunktion:

$A(u) = (10-u)(8–(mu+4)) = (10-u)(4–mu) = 40–10mu-4u+mu^2 = 40–(10m+4)u+mu^2$,

so dass sich als 1. Ableitung A‘(u) = -(10m+4)+2mu, als 2. Ableitung A‘‘(u) = 2m ergibt. Mit:

A‘(u) = 0 ⇔ -(10m+4)+2mu = 0 ⇔ 2mu = 10m+4 ⇔ u = 5+2/m

erhalten wir wegen A‘‘(5+2/m) = 2m < 0 ein relatives (lokales) Maximum von A(u).

III. Als nächstes bestimmen wir zur Geraden y = mx + 4, m<0, deren Nullstelle N als:

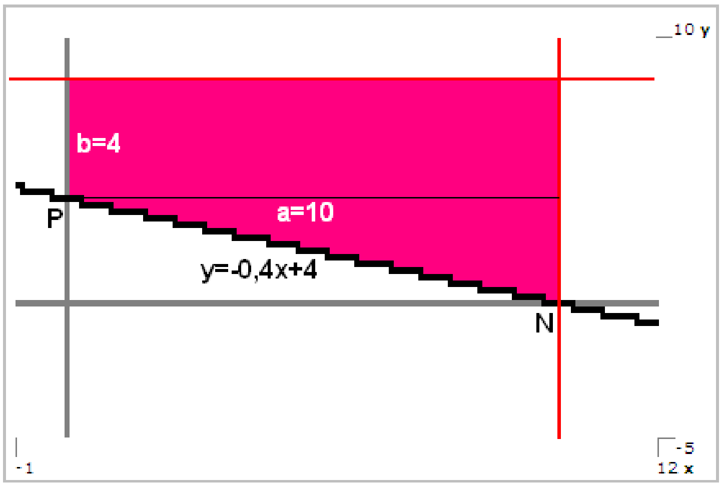
y = 0 ⇔ mx + 4 = 0 ⇔ mx = -4 ⇔ x = -4/m,

also als: N(-4/m|0). Wunschgemäß liegt der Punkt N auf der positiven x-Achse wegen -4/m > 0. Aus der Existenz der Nullstelle N(-4/m|0) lässt sich weiter das Intervall der für die Extremwertaufgabe gültigen u erschließen mit: 0 ≤ u ≤ -4/m, so dass die oben errechnete Flächeninhaltsfunktion $A(u) = 40–(10m+4)u+mu^2$ auf dem Intervall [0; -4/m] definiert ist und dort ihr globales Maximum hat.

IV. Das flächenmaximale Rechteck enthält dann Teile der y-Achse, wenn der Punkt P(u|mu+4) auf der y-Achse liegt, wenn also u = 0 bzw. P(0|4) = $S_y(0|4)$ ist, wenn das lokale Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) bei u = 0 liegt. Also gilt:

u = 5+2/m = 0 ⇔ 2/m = -5 ⇔ m/2 = -1/5 ⇔ m = -2/5 = -0,4.

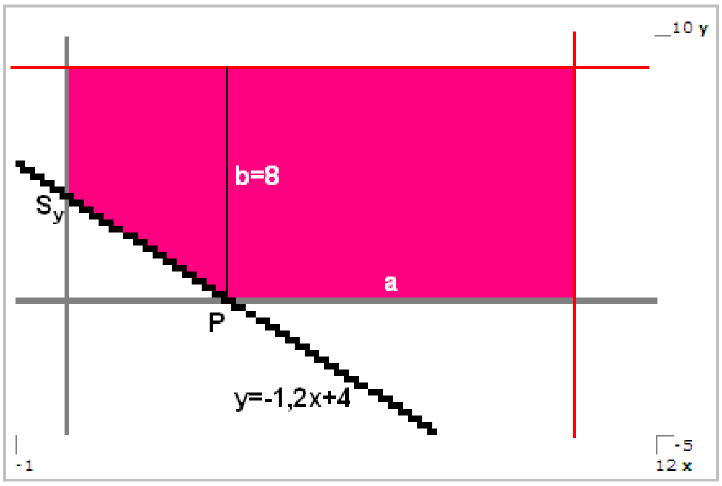
Mit m = -0,4 erhalten wir: y = -0,4x + 4, N(10|0), A(0) = 40 = 10·4 mit der Rechtecklänge a = 10 und der Rechteckbreite b = 4, Letztere auf der y-Achse.



V. Hinsichtlich der x-Achse setzen wir entsprechend das u der Flächeninhaltsfunktion A(u) gleich dem zweiten Rand des Intervalls [0; -4/m], also:

u = 5+2/m = -4/m ⇔ 5 = -6/m ⇔ -5 = 6/m ⇔ -1/5 = m/6 ⇔ m = -6/5 = -1,2.

Mit m = -1,2 erhalten wir: y = -1,2x + 4, P(10/3|0) = N(10/3|0) (wegen -4/(-1,2) = 10/3), A(10/3) = 160/3 = 20/3·8 mit der Rechtecklänge a = 20/3 und der Rechteckbreite b = 8, Erstere auf der x-Achse.



VI. Offensichtlich orientiert sich der Flächeninhalt des flächenmaximalen Rechtecks an der Steigung m der Geraden y = mx + 4. Dabei gilt:

m ≤ -1,2: Seite des flächenmaximalen Rechtecks auf der x-Achse, globales Flächenmaximum an der Randstelle u = -4/m
-1,2 < m < -0,4: globales Flächenmaximum an der Stelle u = 5+2/m
-0,4 ≤ m < 0: Seite des flächenmaximalen Rechtecks auf der y-Achse, globales Flächenmaximum an der Randstelle u = 0.

Wir bestimmen noch die maximale Flächeninhaltsfunktion a(m) in Abhängigkeit von m, m<0. Die Funktion a(m) ist stückweise definiert. Für -0,4 ≤ m < 0 erhalten wir wegen den Seiten a = 10 und b = 4 des flächenmaximalen Rechtecks

$a_3(m) = 10·4 = 40$,

für -1,2 < m < -0,4 gilt wegen u = 5+2/m:

$a_2(m)$ = A(5+2/m) = (10–(5+2/m))(4–m(5+2/m)) = (5–2/m)(4–5m–2) = (5–2/m)(2–5m) = 10–25m–4/m+10 = 20–25m–4/m,

für m ≤ -1,2 ergibt sich auf Grund der Nullstelle N(-4/m|0) und den Seiten a = 10–(-4/m) = 10+4/m und b = 8 des flächenmaximalen Rechtecks

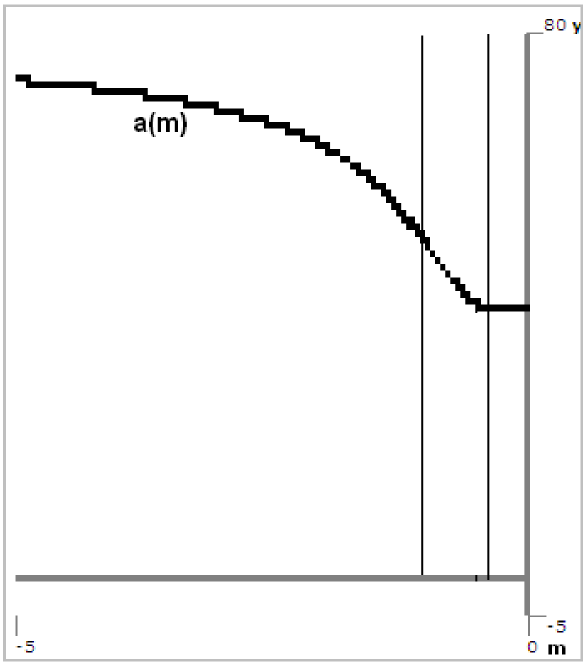
$a_1(m)$ = (10+4/m)·8 = 80 + 32/m.

Für m -> -∞ gilt dann noch: $a_3(m)$ -> 80.

Es ergibt sich die Funktion des maximalen Flächeninhalts damit als:

a(m) = $a_1(m)$ (m ≤ -1,2), = $a_2(m)$ (-1,2 < m < -0,4), = $a_3(m)$ (-0,4 ≤ m < 0), also:

a(m) = 80 + 32/m (m ≤ -1,2)
a(m) = 20–25m–4/m (-1,2 < m < -0,4)
a(m) = 40 (-0,4 ≤ m < 0).



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 200