Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Durch einen Punkt P(x_0|y_0), x_0>0, y_0>0, soll eine Gerade so gelegt werden, dass das von Gerade, nichtnegativer x- und y-Achse begrenzte Dreieck minimalen Flächeninhalt hat.

Lösung: I. <u>Gerade</u>: Allgemeine Geradengleichung: $y = mx + c$ mit Steigung m und y-Achsenabschnitt c. Also Gerade durch Punkt P(x_0|y_0): $y_0 = y(x_0) = mx_0 + c \Leftrightarrow c = y_0 - mx_0$, d.h.: $y = mx + y_0 - mx_0$.

II. <u>Flächeninhaltsfunktion</u> für durch Gerade und Achsen begrenztes Dreieck Δ mit den Eckpunkten Ursprung O(0|0), Q(0|a), R(b|0) und den y- bzw. x-Achsenabschnitten a und b der Geraden y gemäß y-Achsenabschnitt: $a = y = m \cdot 0 + y_0 - mx_0 = y_0 - mx_0$ sowie x-Achsenabschnitt:

$$0 = mb + y_0 - mx_0 \Leftrightarrow mx_0 - y_0 = mb \Leftrightarrow b = \frac{mx_0 - y_0}{m}$$ mit m<0.

Damit ergibt sich die Flächenfunktion:

$$A_\Delta = \frac{ab}{2} = \frac{(y_0 - mx_0)\frac{mx_0 - y_0}{m}}{2} = \frac{(y_0 - mx_0)(mx_0 - y_0)}{2m}$$

$$= -\frac{(mx_0 - y_0)(mx_0 - y_0)}{2m} = -\frac{(mx_0 - y_0)^2}{2m} = A_\Delta(m)$$

in Abhängigkeit von der Geradensteigung m.

III. <u>Extremwertberechnung</u>: Ableiten (nach der Quotientenregel) ergibt:

$$A_\Delta'(m) = -\frac{2(mx_0 - y_0)^1 x_0 \cdot 2m - (mx_0 - y_0)^2 \cdot 2}{(2m)^2}$$

$$= -\frac{2(mx_0 - y_0)[2mx_0 - (mx_0 - y_0)]}{4m^2} = -\frac{(mx_0 - y_0)(mx_0 + y_0)}{2m^2}$$

$$= -\frac{m^2 x_0^2 - y_0^2}{2m^2}$$

$$A_\Delta''(m) = -\frac{2mx_0^2 \cdot 2m^2 - (m^2 x_0^2 - y_0^2) \cdot 4m}{(2m^2)^2}$$

$$= -\frac{2mx_0^2 \cdot 2m^2}{4m^4} + \frac{(m^2 x_0^2 - y_0^2) \cdot 4m}{4m^4}$$

$$= -\frac{x_0^2}{m} + \frac{(m^2 x_0^2 - y_0^2) \cdot 4m}{4m^4}$$

1. Ableitung gleich 0 setzen ergibt:

$$A_\Delta'(m) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(mx_0 - y_0)(mx_0 + y_0)}{2m^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(mx_0 - y_0)(mx_0 + y_0) = 0 \Leftrightarrow mx_0 - y_0 = 0 \vee mx_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$mx_0 = y_0 \vee mx_0 = -y_0 \Leftrightarrow [m = \frac{y_0}{x_0}] \vee m = -\frac{y_0}{x_0}$$

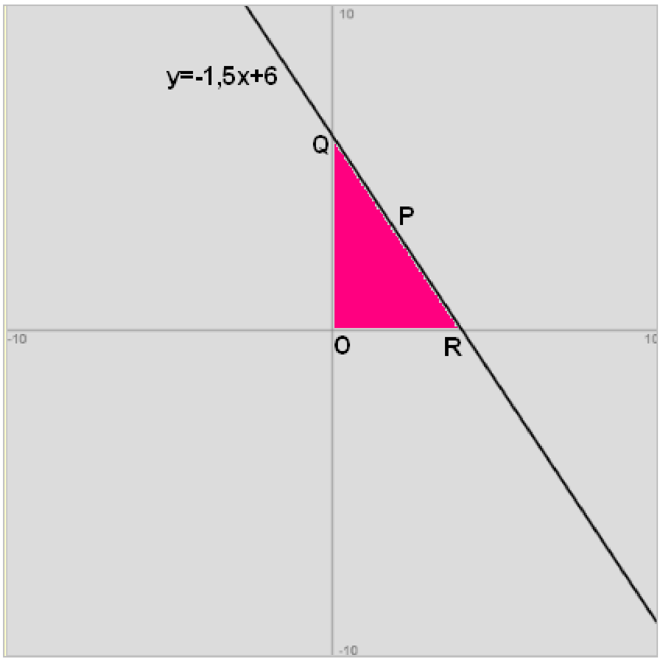
wegen m<0 und x_0, y_0>0. Bei $m=-\frac{y_0}{x_0}$ liegt wegen: $A_\Delta''(-\frac{y_0}{x_0})=-\frac{x_0^2}{-\frac{y_0}{x_0}}=\frac{x_0^2\cdot x_0}{y_0}=\frac{x_0^3}{y_0}>0$ ein (absoluter) Tiefpunkt vor. Die dazugehörige Gerade durch P(x_0|y_0) lautet dann (Einsetzen!):

$$y=-\frac{y_0}{x_0}x+y_0+\frac{y_0}{x_0}x_0 \Leftrightarrow y=-\frac{y_0}{x_0}x+2y_0 .$$

Die dazugehörige Fläche hat wegen $m=-\frac{y_0}{x_0}$ den Wert:

$$A_\Delta(-\frac{y_0}{x_0})=-\frac{(-\frac{y_0}{x_0}x_0-y_0)^2}{2(-\frac{y_0}{x_0})}=-\frac{(-y_0-y_0)^2}{-\frac{2y_0}{x_0}}=\frac{(-2y_0)^2}{\frac{2y_0}{x_0}}=\frac{4y_0^2}{\frac{2y_0}{x_0}}=\frac{4y_0^2x_0}{2y_0}=2x_0y_0 .$$

IV. Spezialfall: Für z.B. P(2|3) ergibt sich als Gerade: $y=-\frac{3}{2}x+6$, als minimaler Flächeninhalt: $A_\Delta=2\cdot 2\cdot 3=12$ FE, als Dreieck ΔQOR mit O(0|0), Q(0|6) und R(4|0).



www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 240