

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Extremwertaufgabe

**Aufgabe:** Durch einen Punkt  $P(x_0|y_0)$ ,  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ , soll eine Gerade so gelegt werden, dass das von Gerade, nichtnegativer x- und y-Achse begrenzte Dreieck minimalen Flächeninhalt hat.

**Lösung:** I. Gerade: Allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + c$  mit Steigung  $m$  und y-Achsenabschnitt  $c$ . Also Gerade durch Punkt  $P(x_0|y_0)$ :  $y_0 = y(x_0) = mx_0 + c \Leftrightarrow c = y_0 - mx_0$ , d.h.:  
 $y = mx + y_0 - mx_0$ .

II. Flächeninhaltsfunktion für durch Gerade und Achsen begrenztes Dreieck  $\Delta$  mit den Eckpunkten Ursprung  $O(0|0)$ ,  $Q(0|a)$ ,  $R(b|0)$  und den y- bzw. x-Achsenabschnitten  $a$  und  $b$  der Geraden  $y$  gemäß y-Achsenabschnitt:  $a = y = m \cdot 0 + y_0 - mx_0 = y_0 - mx_0$  sowie x-Achsenabschnitt:

$$0 = mb + y_0 - mx_0 \Leftrightarrow mx_0 - y_0 = mb \Leftrightarrow b = \frac{mx_0 - y_0}{m} \text{ mit } m < 0.$$

Damit ergibt sich die Flächenfunktion:

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= \frac{ab}{2} = \frac{(y_0 - mx_0) \frac{mx_0 - y_0}{m}}{2} = \frac{(y_0 - mx_0)(mx_0 - y_0)}{2m} \\ &= -\frac{(mx_0 - y_0)(mx_0 - y_0)}{2m} = -\frac{(mx_0 - y_0)^2}{2m} = A_{\Delta}(m) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von der Geradensteigung  $m$ .

III. Extremwertberechnung: Ableiten (nach der Quotientenregel) ergibt:

$$\begin{aligned} A_{\Delta}'(m) &= -\frac{2(mx_0 - y_0)^1 x_0 \cdot 2m - (mx_0 - y_0)^2 \cdot 2}{(2m)^2} \\ &= -\frac{2(mx_0 - y_0)[2mx_0 - (mx_0 - y_0)]}{4m^2} = -\frac{(mx_0 - y_0)(mx_0 + y_0)}{2m^2} \\ &= -\frac{m^2 x_0^2 - y_0^2}{2m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\Delta}''(m) &= -\frac{2mx_0^2 \cdot 2m^2 - (m^2 x_0^2 - y_0^2) \cdot 4m}{(2m^2)^2} \\ &= -\frac{2mx_0^2 \cdot 2m^2}{4m^4} + \frac{(m^2 x_0^2 - y_0^2) \cdot 4m}{4m^4} \\ &= -\frac{x_0^2}{m} + \frac{(m^2 x_0^2 - y_0^2) \cdot 4m}{4m^4} \end{aligned}$$

1. Ableitung gleich 0 setzen ergibt:

$$\begin{aligned} A_{\Delta}'(m) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{(mx_0 - y_0)(mx_0 + y_0)}{2m^2} = 0 \Leftrightarrow \\ (mx_0 - y_0)(mx_0 + y_0) &= 0 \Leftrightarrow mx_0 - y_0 = 0 \vee mx_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow \\ mx_0 = y_0 \vee mx_0 &= -y_0 \Leftrightarrow [m = \frac{y_0}{x_0}] \vee m = -\frac{y_0}{x_0} \end{aligned}$$

wegen  $m < 0$  und  $x_0, y_0 > 0$ . Bei  $m = -\frac{y_0}{x_0}$  liegt wegen:  $A_{\Delta}''(-\frac{y_0}{x_0}) = -\frac{x_0^2}{-\frac{y_0}{x_0}} = \frac{x_0^2 \cdot x_0}{y_0} = \frac{x_0^3}{y_0} > 0$  ein

(absoluter) Tiefpunkt vor. Die dazugehörige Gerade durch  $P(x_0|y_0)$  lautet dann (Einsetzen!):

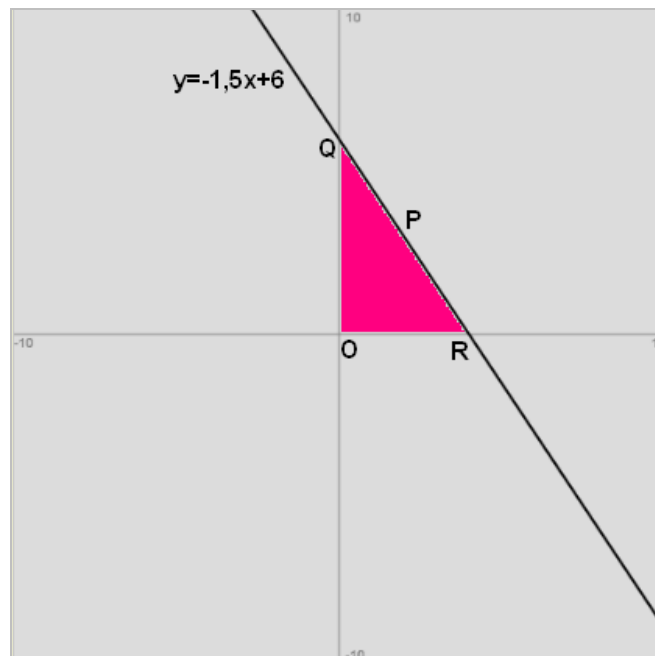
$$y = -\frac{y_0}{x_0}x + y_0 + \frac{y_0}{x_0}x_0 \Leftrightarrow y = -\frac{y_0}{x_0}x + 2y_0.$$

Die dazugehörige Fläche hat wegen  $m = -\frac{y_0}{x_0}$  den Wert:

$$A_{\Delta}(-\frac{y_0}{x_0}) = -\frac{(-\frac{y_0}{x_0}x_0 - y_0)^2}{2(-\frac{y_0}{x_0})} = -\frac{(-y_0 - y_0)^2}{-\frac{2y_0}{x_0}} = \frac{(-2y_0)^2}{\frac{2y_0}{x_0}} = \frac{4y_0^2}{\frac{2y_0}{x_0}} = \frac{4y_0^2 x_0}{2y_0} = 2x_0 y_0.$$

IV. Spezialfall: Für z.B.  $P(2|3)$  ergibt sich als Gerade:  $y = -\frac{3}{2}x + 6$ , als minimaler Flächeninhalt:

$A_{\Delta} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$  FE, als Dreieck  $\Delta QOR$  mit  $O(0|0)$ ,  $Q(0|6)$  und  $R(4|0)$ .



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 05.2016 / Aufgabe 240