Michael Buhlmann

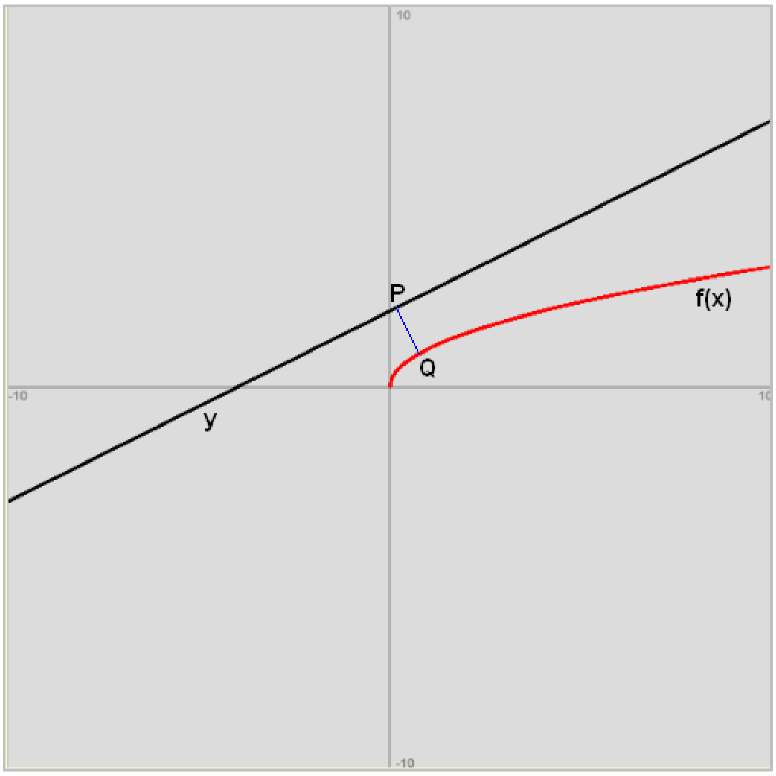
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Welcher Punkt auf der Geraden $y = \frac{x}{2} + 2$ hat den geringsten Abstand zur Funktion $f(x) = \sqrt{x}$?

Lösung: I. Hinsichtlich $y = \frac{x}{2} + 2$ und $f(x) = \sqrt{x}$ gilt zunächst: $y > f(x)$. Im geringsten Abstand müssen die Steigungen von Gerade und Funktion übereinstimmen, also:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = y' \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Wir erhalten mit x=1 auf der Funktion f(x) den Punkt Q(1|f(1)) = Q(1|1), der damit eine zur Geraden y parallele Tangente besitzt.



II. Zum Punkt Q(1|1) auf $f(x)$ ist dann der Punkt P(x|y) auf der Geraden y mit minimalen Abstand zu finden, d.h. es gilt für die (quadratische) Abstandsfunktion auf Grund von:

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

und von $y = \frac{x}{2} + 2$ (Gerade, Punkt P(x|y)) und x_0=1, y_0=1 (Punkt Q(1|1)):

$$D(x) = d^2(x) = (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (\frac{x}{2} + 2 - 1)^2$$

$= (x-1)^2 + (\frac{x}{2}+1)^2$

mit:

$D'(x) = 2(x-1) + 2(\frac{x}{2}+1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 1$.

Dann ist:

$D'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

und damit wegen $y(\frac{2}{5}) = \frac{1}{5} + 2 = \frac{11}{5}$ der Punkt P($\frac{2}{5}$|$\frac{11}{5}$) der Punkt auf der Geraden mit minimalem Abstand von Q, d.h. mit minimalem Abstand zur Funktion f(x).

III. Der minimale Abstand zwischen Gerade und Funktion ist dann der Abstand zwischen den Punkten P und Q, also:

$d(\frac{2}{5}) = \sqrt{(\frac{2}{5}-1)^2 + (\frac{11}{5}-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{45} = \frac{3}{5}\sqrt{5} = 1{,}342$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 241