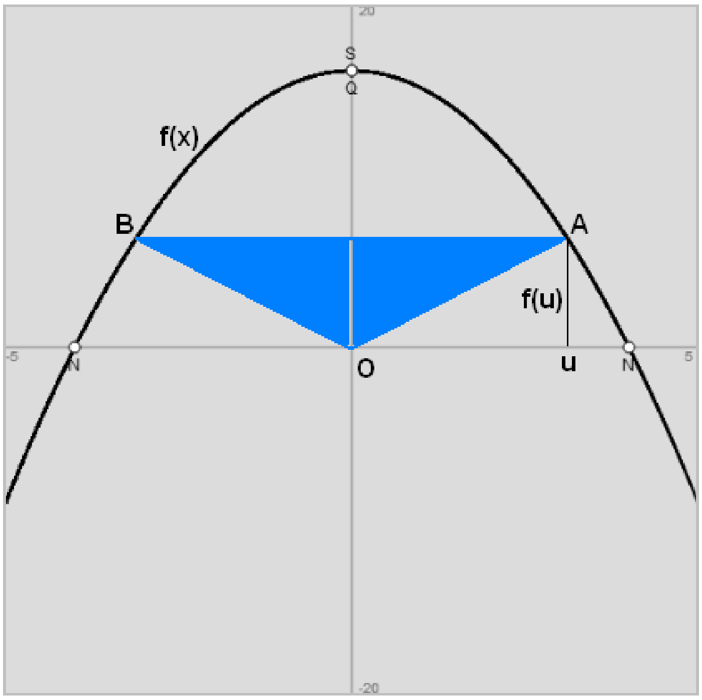
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel $f(x) = 16 - x^2$. Bei einem zur y-Achse symmetrischen Dreieck ΔABO liegt die Spitze O im Koordinatenursprung, liegen die Punkte A und B auf der Funktion. Bestimme die Eckpunkte A und B so, dass die Fläche des in die Funktion einbeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist die maximale Fläche?

Lösung: I. Wir gehen aus von folgender Situation mit Funktion $f(x) = 16 - x^2$ und Dreieck ΔABO:



Die Punkte A, B, O haben u.a. wegen der Achsensymmetrie von Funktion f(x) und Dreieck ΔABO das Aussehen: A(u|f(u)), B(-u|f(-u)) = B (-u|f(u)), O(0|0) mit $0 \le u \le 4$.

II. Die Dreiecksfläche A = gh/2 mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

$g = u - (-u) = 2u$ LE
$h = f(u) = 16 - u^2$ LE

als:

$A(u) = 2u\cdot(16-u^2)/2 = u\cdot(16-u^2) = 16u - u^3$ FE.

III. Das (lokale) Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) bestimmt sich mit:

$A'(u) = 16 - 3u^2 = 0 \Leftrightarrow 16 = 3u^2 \Leftrightarrow 16/3 = u^2 \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$,

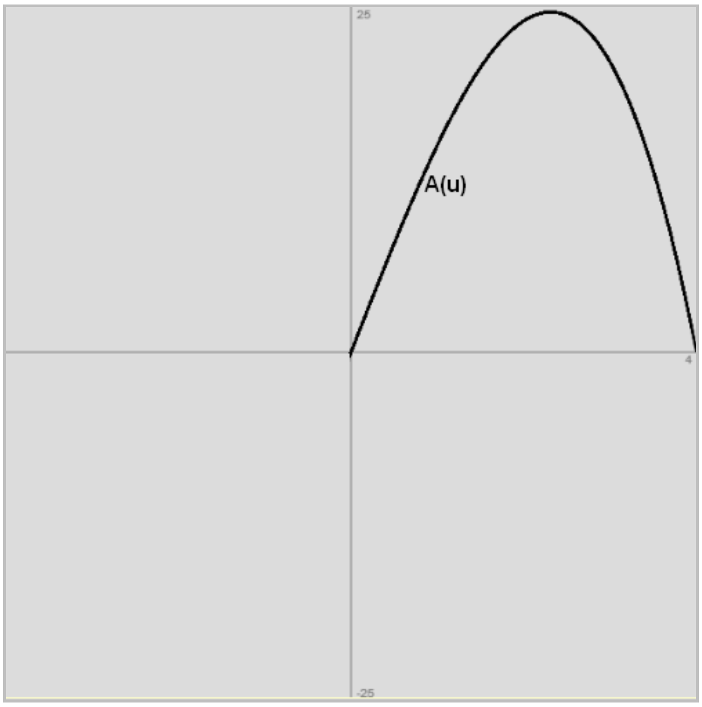
also wegen $u \ge 0$ mit $u = \frac{4}{\sqrt{3}}$ und:

$A''(u) = -6u \Rightarrow A''(\frac{4}{\sqrt{3}}) = -6\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{24}{\sqrt{3}} < 0$

als:

$A(\frac{4}{\sqrt{3}}) = 24{,}633$ FE

für den maximalen Flächeninhalt, während für die Randstellen des Intervalls [0; 4] A(0) = A(4) = 0 FE gilt.



Die Ecken A und B des flächenmaximalen Dreiecks ΔABO bestimmen sich dann zu:

$A(\frac{4}{\sqrt{3}} | \frac{32}{3})$

$B(-\frac{4}{\sqrt{3}} | \frac{32}{3})$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 243