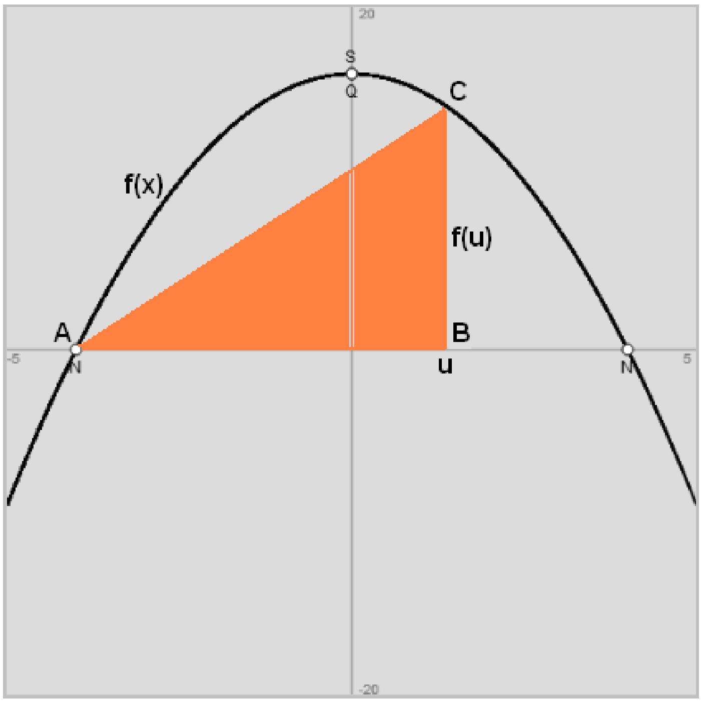
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel f(x) = 16 – x^2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist der Eckpunkt A die negative Nullstelle der Funktion, der Eckpunkt C liegt auf der Funktion, der Eckpunkt B auf der x-Achse unterhalb von C. Bestimme die Eckpunkte A, B und C so, dass die Fläche des in die Funktion einbeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist die maximale Fläche?

Lösung: I. Wir gehen aus von folgender Situation mit Funktion f(x) = 16 – x^2 und Dreieck ΔABC:



Die Punkte A, B, C haben u.a. wegen:

f(x) =0 ⇔ 16 – x^2 = 0 ⇔ 16 = x^2 ⇔ x = ±4

das Aussehen: A(-4|0), B(u|0), C(u|f(u)) mit -4 ≤ u ≤ 4.

II. Die Dreiecksfläche A = gh/2 mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

g = u – (-4) = u+4 LE
h = f(u) = 16 – u^2 LE

als:

A(u) = (u+4)·(16–u^2)/2 = (-u^3–4u^2+16u+64)/2 = -0,5u^3 – 2u^2 + 8u + 32 FE.

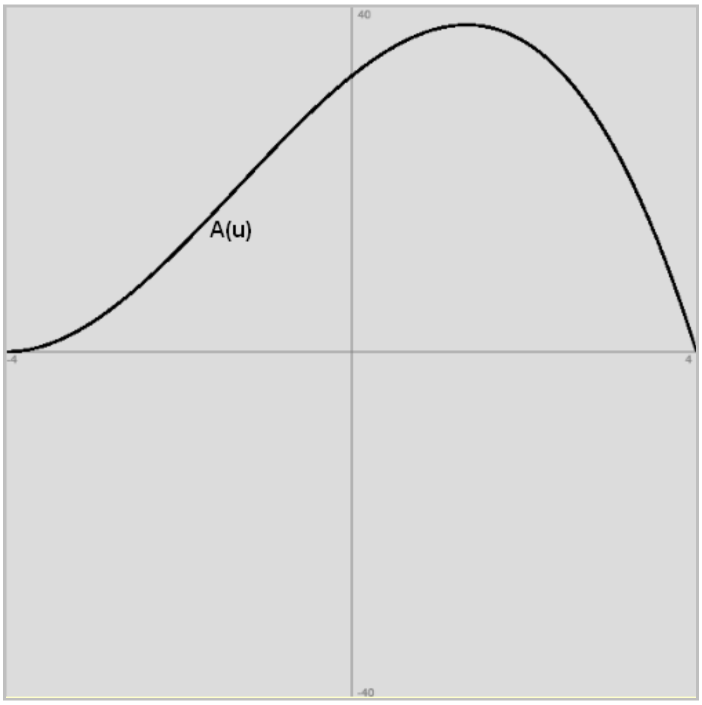
III. Das (lokale) Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) bestimmt sich zunächst mit:

A'(u) = -1,5u^2 – 4u + 8 = 0 ⇔ $u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1{,}5) \cdot 8}}{2 \cdot (-1{,}5)} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{-3} = \frac{4 \pm 8}{-3}$ ⇔ u = -4, u = $\frac{4}{3}$.

Wegen A''(u) = -3u – 4 folgt:

A''(-4) = -3·(-4) – 4 = 12 – 4 > 0 => relatives Minimum bei u = -4

A''($\frac{4}{3}$) = $-3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = -4 - 4 = -8$ < 0 => relatives Maximum bei u = $\frac{4}{3}$.



Beim lokalen Maximum u = $\frac{4}{3}$ ergibt sich:

A($\frac{4}{\sqrt{3}}$) = $37\frac{25}{27}$ = 37,926 FE

für den maximalen Flächeninhalt, während für die Randstellen des Intervalls [-4; 4] A(-4) = A(4) = 0 FE gilt. Die Ecken B und C des flächenmaximalen Dreiecks ΔABC bestimmen sich dann zu:

B($\frac{4}{3}$|0)

C($\frac{4}{3}$|$\frac{128}{9}$),

so dass Grundseite g und Höhe h des Dreiecks ΔABC sich ergeben als:

g = 4+$\frac{4}{3}$ = $\frac{16}{3}$

h = $\frac{128}{9}$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 244