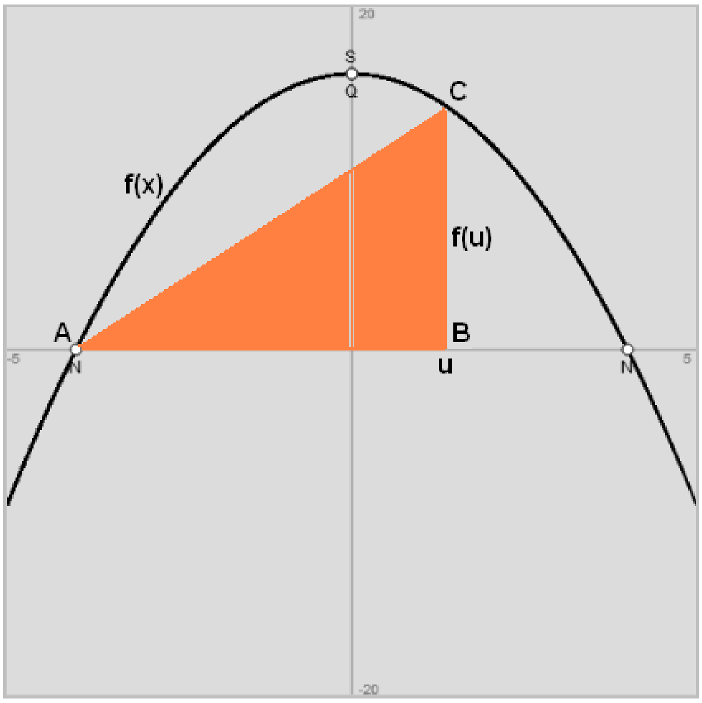
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel $f(x) = 16 – x^2$. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ∆ABC ist der Eckpunkt A die negative Nullstelle der Funktion, der Eckpunkt C liegt auf der Funktion, der Eckpunkt B auf der x-Achse unterhalb von C. Bestimme die Eckpunkte A, B und C so, dass die Fläche des in die Funktion einbeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist die maximale Fläche?

Lösung: I. Wir gehen aus von folgender Situation mit Funktion $f(x) = 16 – x^2$ und Dreieck ∆ABC:



Die Punkte A, B, C haben u.a. wegen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 16 – x^2 = 0 \Leftrightarrow 16 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 4$

das Aussehen: A(-4|0), B(u|0), C(u|f(u)) mit $-4 \le u \le 4$.

II. Die Dreiecksfläche A = gh/2 mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

g = u – (-4) = u+4 LE
$h = f(u) = 16 – u^2$ LE
als:

$A(u) = (u+4)\cdot(16–u^2)/2 = (-u^3–4u^2+16u+64)/2 = -0{,}5u^3 – 2u^2 + 8u + 32$ FE.

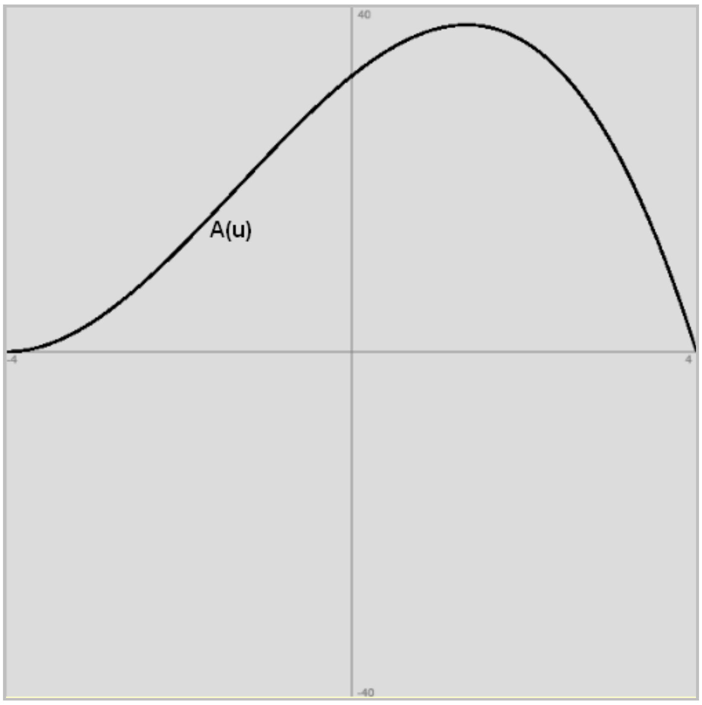
III. Das (lokale) Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) bestimmt sich zunächst mit:

$$A'(u) = -1{,}5u^2 – 4u + 8 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1{,}5)\cdot 8}}{2\cdot(-1{,}5)} = \frac{4\pm\sqrt{64}}{-3} = \frac{4\pm 8}{-3} \Leftrightarrow u = -4,\ u = \frac{4}{3}.$$

Wegen $A''(u) = -3u – 4$ folgt:

$A''(-4) = -3\cdot(-4) – 4 = 12 – 4 > 0$ => relatives Minimum bei u = -4

$A''(\frac{4}{3}) = -3\cdot\frac{4}{3} - 4 = -4 - 4 = -8 < 0$ => relatives Maximum bei $u = \frac{4}{3}$.



Beim lokalen Maximum u = $\frac{4}{3}$ ergibt sich:

A($\frac{4}{\sqrt{3}}$) = $37\frac{25}{27}$ = 37,926 FE

für den maximalen Flächeninhalt, während für die Randstellen des Intervalls [-4; 4] A(-4) = A(4) = 0 FE gilt. Die Ecken B und C des flächenmaximalen Dreiecks ΔABC bestimmen sich dann zu:

B($\frac{4}{3}$|0)

C($\frac{4}{3}$|$\frac{128}{9}$),

so dass Grundseite g und Höhe h des Dreiecks ΔABC sich ergeben als:

g = 4+$\frac{4}{3}$ = $\frac{16}{3}$

h = $\frac{128}{9}$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 244