

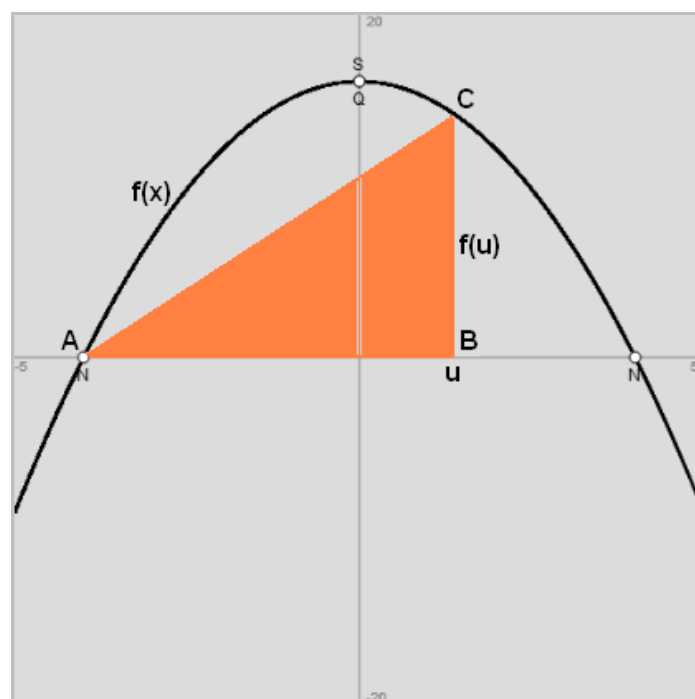
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel $f(x) = 16 - x^2$. Bei einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist der Eckpunkt A die negative Nullstelle der Funktion, der Eckpunkt C liegt auf der Funktion, der Eckpunkt B auf der x-Achse unterhalb von C. Bestimme die Eckpunkte A, B und C so, dass die Fläche des in die Funktion eingeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist die maximale Fläche?

Lösung: I. Wir gehen aus von folgender Situation mit Funktion $f(x) = 16 - x^2$ und Dreieck $\triangle ABC$:



Die Punkte A, B, C haben u.a. wegen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 16 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

das Aussehen: $A(-4|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f(u))$ mit $-4 \leq u \leq 4$.

II. Die Dreiecksfläche $A = gh/2$ mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

$$g = u - (-4) = u + 4 \text{ LE}$$

$$h = f(u) = 16 - u^2 \text{ LE}$$

als:

$$A(u) = (u+4) \cdot (16-u^2) / 2 = (-u^3 - 4u^2 + 16u + 64) / 2 = -0,5u^3 - 2u^2 + 8u + 32 \text{ FE.}$$

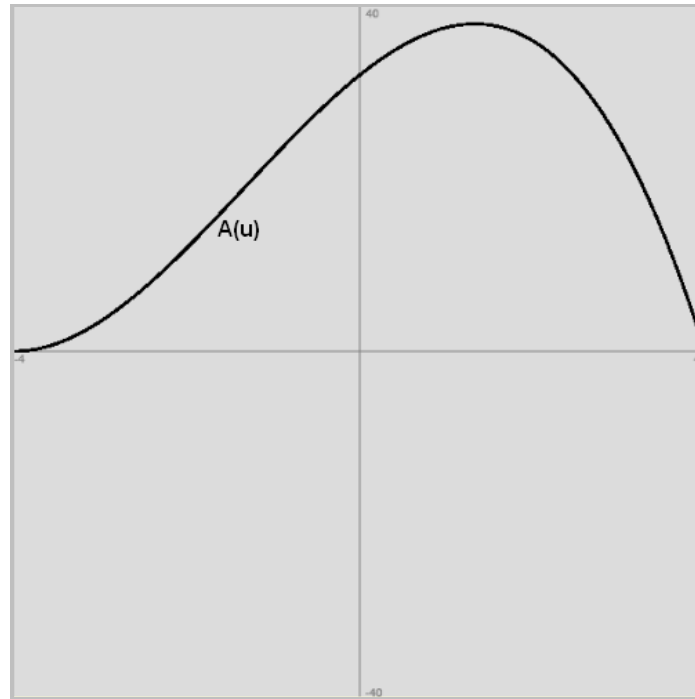
III. Das (lokale) Maximum der Flächeninhaltsfunktion $A(u)$ bestimmt sich zunächst mit:

$$A'(u) = -1,5u^2 - 4u + 8 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1,5) \cdot 8}}{2 \cdot (-1,5)} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{-3} = \frac{4 \pm 8}{-3} \Leftrightarrow u = -4, u = \frac{4}{3}.$$

Wegen $A''(u) = -3u - 4$ folgt:

$$A''(-4) = -3 \cdot (-4) - 4 = 12 - 4 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } u = -4$$

$$A''\left(\frac{4}{3}\right) = -3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = -4 - 4 = -8 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum bei } u = \frac{4}{3}.$$



Beim lokalen Maximum $u = \frac{4}{3}$ ergibt sich:

$$A\left(\frac{4}{3}\right) = 37\frac{25}{27} = 37,926 \text{ FE}$$

für den maximalen Flächeninhalt, während für die Randstellen des Intervalls $[-4; 4]$ $A(-4) = A(4) = 0$ FE gilt. Die Ecken B und C des flächenmaximalen Dreiecks $\triangle ABC$ bestimmen sich dann zu:

$$B\left(\frac{4}{3} \mid 0\right)$$

$$C\left(\frac{4}{3} \mid \frac{128}{9}\right),$$

so dass Grundseite g und Höhe h des Dreiecks $\triangle ABC$ sich ergeben als:

$$g = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$h = \frac{128}{9}.$$