

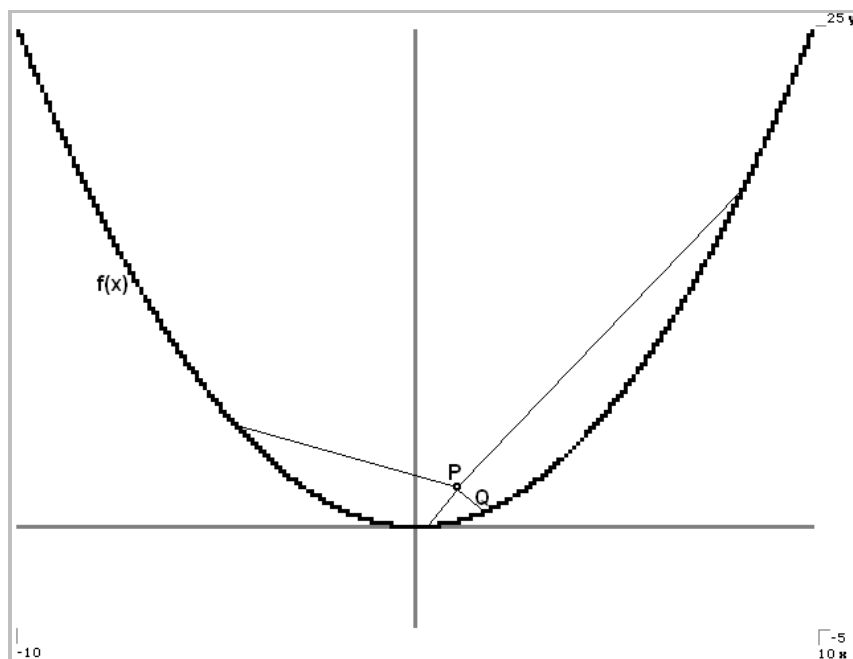
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die nach oben geöffnete allgemeine Parabel $f(x) = x^2/4$ sowie ein Punkt $P(1|2)$ im x-y-Koordinatensystem. Welcher Punkt Q auf der Parabel hat vom Punkt P den kleinsten Abstand und wie groß ist Letzterer?

Lösung: I. Wir gehen aus von folgender Situation mit der Funktion $f(x) = x^2/4$ und dem Punkt $P(1|2)$:



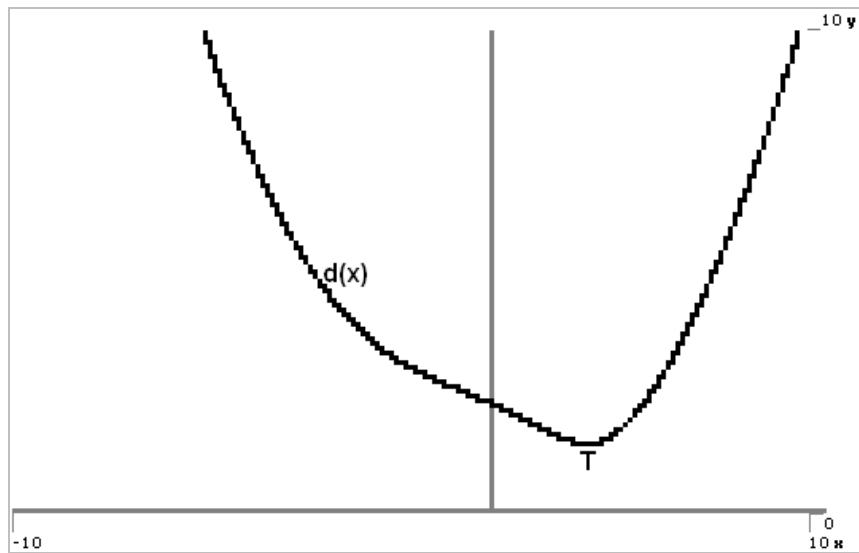
II. Für einen Punkt Q auf $f(x)$, also für $Q(x|f(x))$ errechnet sich der Abstand zu einem Punkt $P(x_0|y_0)$ nach dem Satz des Pythagoras, so dass sich Abstandsfunktion $d(x)$ ergibt:

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2} .$$

Das bedeutet mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ wegen $P(1|2)$ und auf Grund von $f(x) = x^2/4$:

$$d(x) = \sqrt{(x - 1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2} .$$

III. Die Abstandsfunktion $d(x)$ besitzt das (globale) Minimum bei $x = 2$ mit $d(2) = \sqrt{2} = 1,4142$, wie dem nachstehenden Graphen zu entnehmen ist:



Der Punkt Q auf der Funktion $f(x)$ mit minimalem Abstand zum Punkt P lautet damit: $Q(2|f(2)) = Q(2|1)$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 245