

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Aus einem Kegel mit Radius und Höhe $r_K = h_K = a$ (> 0) soll ein Zylinder mit maximalem Volumen herausgearbeitet werden. Wie groß ist das maximale Volumen des Zylinders?

Lösung: I. Aus der Geometrie erhalten wir die Volumenformeln für Kegel und Zylinder:

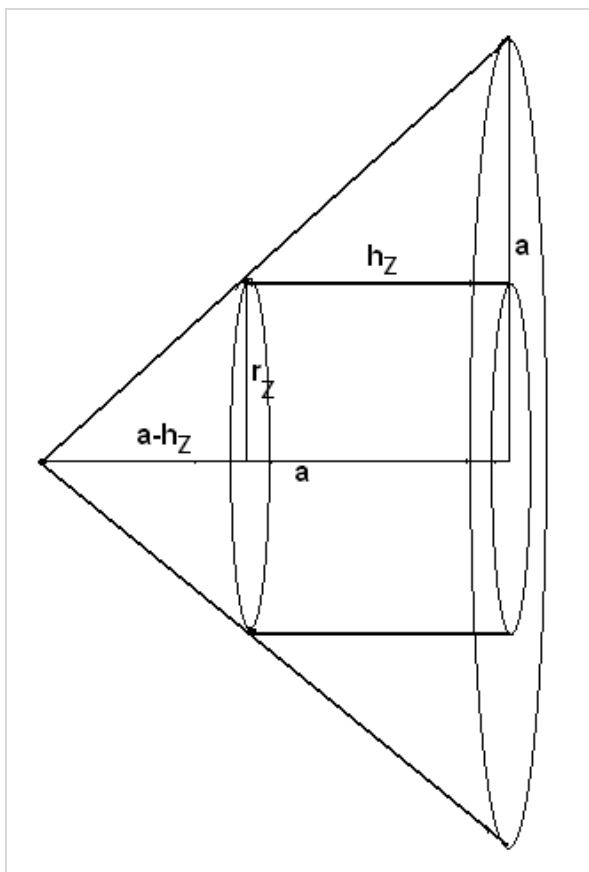
$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h.$$

II. Als Volumen des Kegels ergibt sich mit $r_K = h_K = a$:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi a^2 a = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

Der Zylinder mit Radius r_Z und Höhe h_Z ist im Kegel eingepasst:



Die Volumenformel für den Zylinder:

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r_Z^2 h_Z$$

wird auf Grund der Strahlensätze (2. Strahlensatz) wegen: $\frac{a-h_Z}{a} = \frac{r_Z}{a}$ und damit: $a-h_Z = r_Z$ bzw.:

$a-r_Z = h_Z$ zu:

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r_z^2 (a - r_z).$$



$$V(r_z) = \pi r_z^2 (a - r_z)$$

III. Für die Funktion $V_{\text{Zylinder}} = V(r_z) = \pi r_z^2 (a - r_z)$ ermitteln wir das lokale bzw. globale Maximum im Intervall $[0; a]$. Als Ableitungen ergeben sich auf Grund von: $V(r_z) = \pi r_z^2 (a - r_z) = \pi a r_z^2 - \pi r_z^3$:

$$V'(r_z) = 2\pi a r_z - 3\pi r_z^2,$$

$$V''(r_z) = 2\pi a - 6\pi r_z.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$V'(r_z) = 2\pi a r_z - 3\pi r_z^2 = 0 \Leftrightarrow 2a r_z - 3r_z^2 = 0 \Leftrightarrow r_z(2a - 3r_z) = 0 \Leftrightarrow r_z = 0 \vee 2a - 3r_z = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_z = 0 \vee 2a = 3r_z \Leftrightarrow r_z = 0 \vee r_z = \frac{2}{3}a$$

Einsetzen der gefundenen Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$$V''(0) = 2\pi a - 6\pi \cdot 0 = 2\pi a > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } r_z = 0$$

$$V''\left(\frac{2}{3}a\right) = 2\pi a - 6\pi \cdot \frac{2}{3}a = 2\pi a - 4\pi a = -2\pi a < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } r_z = \frac{2}{3}a.$$

Wir betrachten noch die Randstellen des Intervalls $[0; a]$ mit:

$$V(0) = 0 \text{ (Tiefpunkt laut 1. und 2. Ableitung)}$$

$$V(a) = 0,$$

so dass das lokale Maximum $r_z = \frac{2}{3}a$ global ist. Das maximale Volumen des Zylinders errechnet sich dann als:

$$V_{\text{Zylinder}} = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \pi \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \left(a - \frac{2}{3}a\right) = \pi \cdot \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{4}{27}\pi a^3.$$

Ein Vergleich von Kegel- zu maximalem Zylindervolumen ergibt dann noch:

$$\frac{V_{\text{Zylinder}}}{V_{\text{Kegel}}} = \frac{\frac{4}{27}\pi a^3}{\frac{1}{3}\pi a^3} = \frac{\frac{4}{27}\pi}{\frac{1}{3}\pi} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{27} \cdot \frac{3}{1} = \frac{4}{9}.$$

Das Volumen des maximalen Zylinders macht also $\frac{4}{9}$ des vorgegebenen Kegels aus.

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 256