Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Aus einem Kegel mit Radius und Höhe $r_K = h_K = a$ (> 0) soll ein Zylinder mit maximalem Volumen herausgearbeitet werden. Wie groß ist das maximale Volumen des Zylinders?

Lösung: I. Aus der Geometrie erhalten wir die Volumenformeln für Kegel und Zylinder:

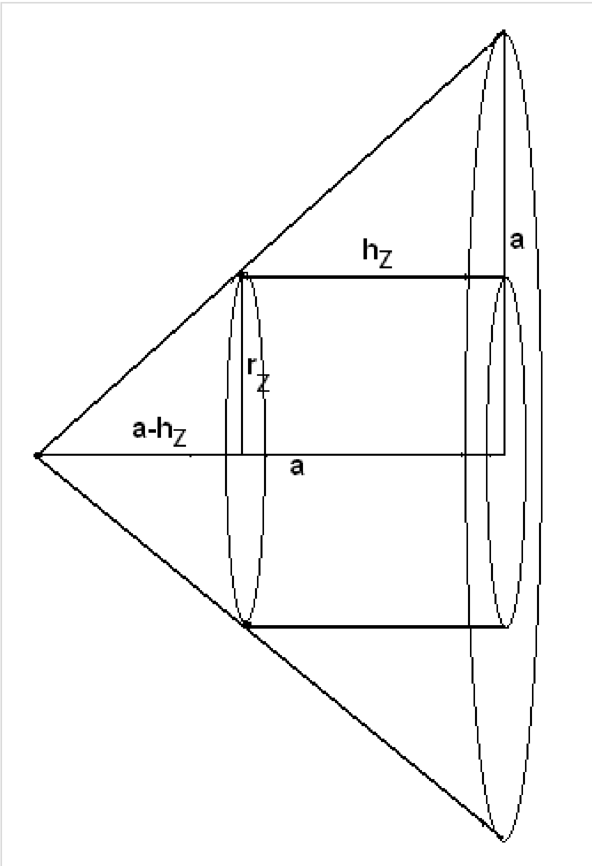
$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{Zylinder} = \pi r^2 h\,.$$

II. Als Volumen des Kegels ergibt sich mit $r_K = h_K = a$:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi a^2 a = \frac{1}{3}\pi a^3\,.$$

Der Zylinder mit Radius r_Z und Höhe h_z ist im Kegel eingepasst:

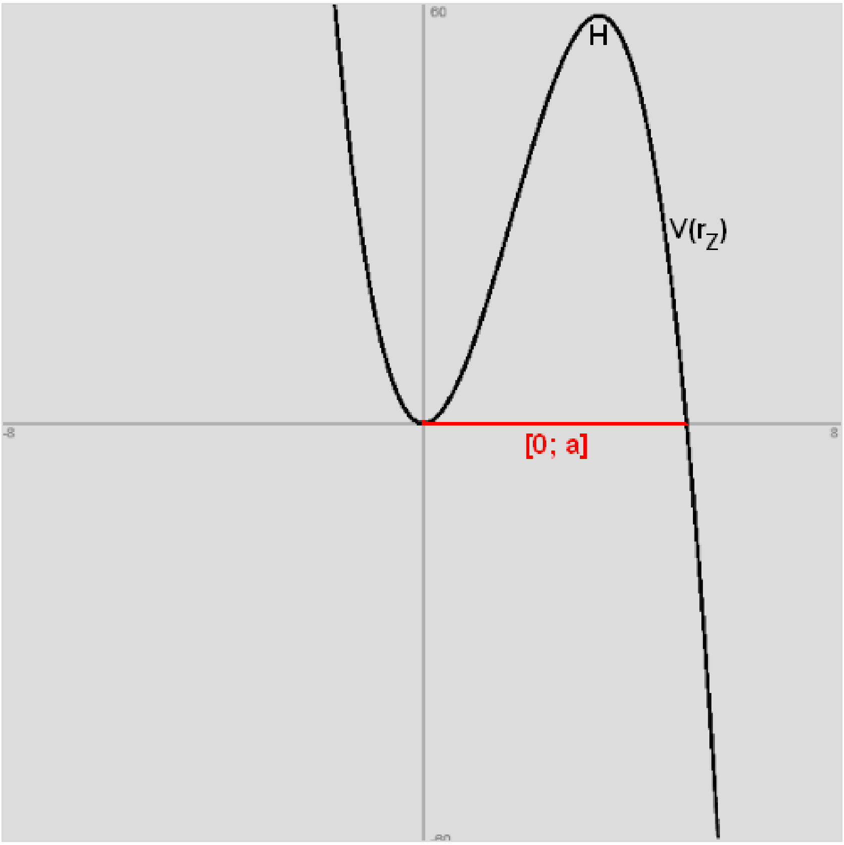


Die Volumenformel für den Zylinder:

$$V_{Zylinder} = \pi r_Z^2 h_Z$$

wird auf Grund der Strahlensätze (2. Strahlensatz) wegen: $\frac{a-h_Z}{a} = \frac{r_Z}{a}$ und damit: $a–h_Z = r_Z$ bzw.: $a–r_Z = h_Z$ zu:

$V_{Zylinder} = \pi r_Z^2 (a - r_Z)$.



V(r_Z) = πr_Z^2(a–r_Z)

III. Für die Funktion $V_{Zylinder} = V(r_Z) = \pi r_Z^2 (a - r_Z)$ ermitteln wir das lokale bzw. globale Maximum im Intervall [0; a]. Als Ableitungen ergeben sich auf Grund von: $V(r_Z) = \pi r_Z^2 (a - r_Z) = \pi a r_Z^2 - \pi r_Z^3$:

$V'(r_Z) = 2\pi a r_Z - 3\pi r_Z^2$,

$V''(r_Z) = 2\pi a - 6\pi r_Z$.

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$V'(r_Z) = 2\pi a r_Z - 3\pi r_Z^2 = 0 \Leftrightarrow 2a r_Z - 3r_Z^2 = 0 \Leftrightarrow r_Z(2a - 3r_Z) = 0 \Leftrightarrow r_Z = 0 \vee 2a - 3r_Z = 0 \Leftrightarrow$

$r_Z = 0 \vee 2a = 3r_Z \Leftrightarrow r_Z = 0 \vee r_Z = \frac{2}{3}a$

Einsetzen der gefundenen Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$V''(0) = 2\pi a - 6\pi \cdot 0 = 2\pi a > 0$ => Tiefpunkt bei $r_Z = 0$

$V''(\frac{2}{3}a) = 2\pi a - 6\pi \cdot \frac{2}{3}a = 2\pi a - 4\pi a = -2\pi a < 0$ => Hochpunkt bei $r_Z = \frac{2}{3}a$.

Wir betrachten noch die Randstellen des Intervalls [0; a] mit:

V(0) = 0 (Tiefpunkt laut 1. und 2. Ableitung)

V(a) = 0,

so dass das lokale Maximum $r_Z = \frac{2}{3}a$ global ist. Das maximale Volumen des Zylinders errechnet sich dann als:

$$V_{Zylinder} = V(\frac{2}{3}a) = \pi\left(\frac{2}{3}a\right)^2 (a - \frac{2}{3}a) = \pi \cdot \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{4}{27}\pi a^3.$$

Ein Vergleich von Kegel- zu maximalem Zylindervolumen ergibt dann noch:

$$\frac{V_{Zylinder}}{V_{Kegel}} = \frac{\frac{4}{27}\pi a^3}{\frac{1}{3}\pi a^3} = \frac{\frac{4}{27}\pi}{\frac{1}{3}\pi} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{27} \cdot \frac{3}{1} = \frac{4}{9}.$$

Das Volumen des maximalen Zylinders macht also 4/9 des vorgegebenen Kegels aus.

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 256