Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

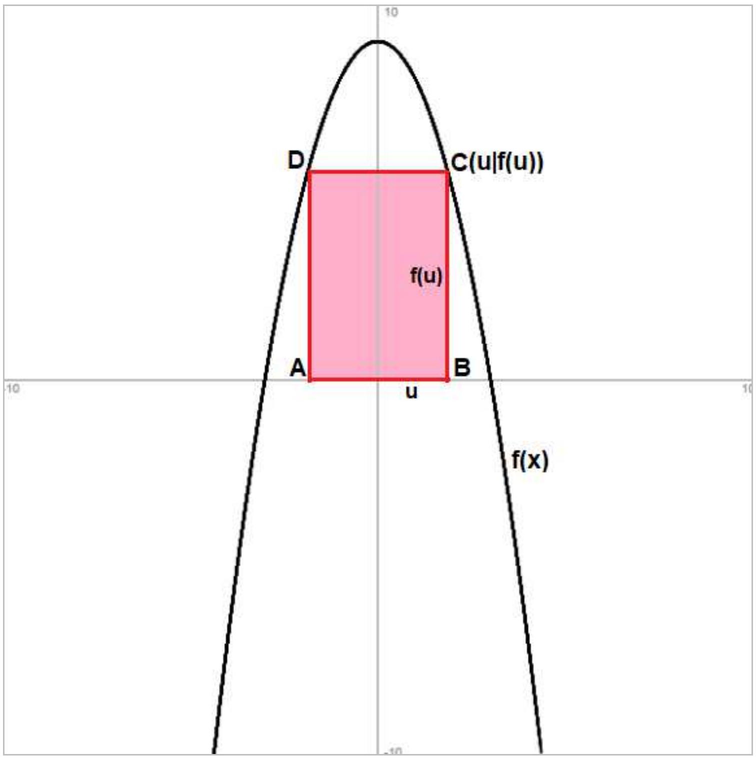
Aufgabe: Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel $f(x) = 9 – x^2$, die achsensymmetrisch zur y-Achse des kartesischen x-y-Koordinatensystems ist.

a) In die Kurve der Normalparabel sollen achsensymmetrische Rechtecke ABCD einbeschrieben werden, so dass die Ecken A, B auf der x-Achse, die Ecken C, D auf der Kurve liegen. Bestimme Ecken und Fläche des flächenmaximalen Rechtecks.

b) Zwischen x-Achse und Kurve der Normalparabel soll ein Quadrat einbeschrieben werden, so dass die Ecken A, B auf der x-Achse, die Ecken C, D auf der Kurve liegen. Bestimme Ecken und Fläche des Quadrats.

c) In Verallgemeinerung von Aufgabe b) soll für die allgemeine achsensymmetrische Parabel $f(x) = a – bx^2$ (a, b > 0) die Fläche eines zwischen x-Achse und Kurve einbeschriebenen (eindeutig bestimmten) Quadrats ermittelt werden.

Lösung: a) I. Wir gehen aus von folgender Situation mit der Funktion $f(x) = 9 – x^2$ und dem Rechteck ABCD:



Die Punkte A, B, C, D haben u.a. wegen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 – x^2 = 0 \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 3$

das Aussehen: A(-u|0), B(u|0), C(u|f(u)), D(-u|f(u)) mit $0 \leq u \leq 3$ (u-Intervall [0; 3]).

II. Die Rechteckfläche A = gh mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

g = 2u LE
$h = f(u) = 9 – u^2$ LE

als:

$A(u) = 2u\cdot(9–u^2) = -2u^3+18u$ FE.

III. Das (lokale) Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) bestimmt sich zunächst mit:

$A'(u) = -6u^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow 18 = 6u^2 \Leftrightarrow 3 = u^2 \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{3}$,

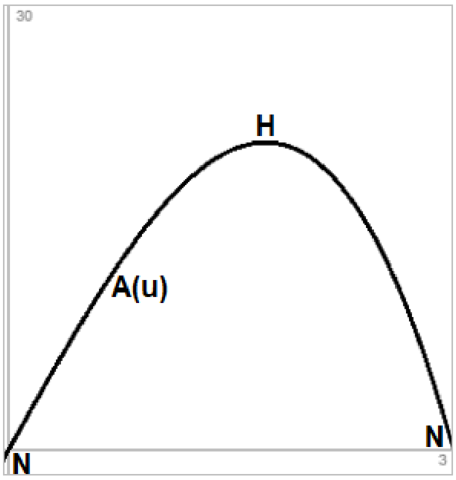
wobei nur für den Wert $u = \sqrt{3}$ gilt: $0 \le u = \sqrt{3} \le 3$. Wegen $A''(u) = -12u$ folgt:

$A''(\sqrt{3}) = -12\cdot\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum bei $u = \sqrt{3}$.

Beim lokalen Maximum $u = \sqrt{3}$ ergibt sich:

$A(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}^3 + 18\sqrt{3} = -6\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3} = 20{,}78$ FE

für den maximalen Flächeninhalt. Das lokale Maximum ist auf dem u-Intervall [0; 3] global, weil für die Randstellen des u-Intervalls $A(0) = A(3) = 0$ FE gilt. Die Ecken A, B, C, D des flächenmaximalen Rechtecks bestimmen sich dann wegen $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 9-\sqrt{3}^2 = 9-3 = 6$ zu:



$A(-\sqrt{3}|0)$, $B(\sqrt{3}|0)$, $C(\sqrt{3}|6)$, $D(-\sqrt{3}|6)$,

so dass Grundseite g und Höhe h des Rechtecks sich ergeben als: $g = 2\sqrt{3}$ LE, $h = 6$ LE.

b) Es gibt – wie wir sehen werden – genau ein Quadrat, das zwischen x-Achse und Kurve der Normalparabel $f(x) = 9 - x^2$ einbeschrieben wird. Damit ein Rechteck ABCD (siehe Aufgabe a)) ein Quadrat wird, müssen die Seitenlängen g und h übereinstimmen. Es gilt wieder wegen $g = 2u$, $h = 9 - u^2$ bei $0 \le u \le 3$:

$$g = h \Leftrightarrow 2u = 9-u^2 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 9 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}.$$

Nur $u = -1+\sqrt{10}$ liegt im u-Intervall [0; 3] mit: $u = -1+\sqrt{10} \approx 2{,}16$. Mit $g = 2\cdot 2{,}16 = 4{,}32$ und $h = f(2{,}16) = 9 - 2{,}16^2 = 4{,}32$ erhalten wir die gleichen Seitenlängen des Quadrats, das die Ecken:

$A(-2{,}16|0)$, $B(2{,}16|0)$, $C(2{,}16|4{,}32)$, $D(-2{,}16|4{,}32)$

und den Flächeninhalt: $A_Q = 4{,}32^2 = 18{,}66$ FE besitzt.

c) Für eine allgemeine Parabel $f(x) = a - bx^2$ $(a, b > 0)$ gilt für deren Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a - bx^2 = 0 \Leftrightarrow a = bx^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}},$$

so dass mit $0 \le u \le \sqrt{\frac{a}{b}}$ (u-Intervall $[0; \sqrt{\frac{a}{b}}]$) für die Grundseite g und Höhe h des zu ermittelnden (somit eindeutig bestimmten) Quadrats $g = 2u$, $h = f(u) = a - bu^2$ gilt und weiter:

$g = h \Leftrightarrow 2u = a-bu^2 \Leftrightarrow bu^2 + 2u - a = 0 \Leftrightarrow$

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot b\cdot(-a)}}{2\cdot b} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4ab}}{2b} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+ab}}{2b} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+ab}}{b}$$

Der Wert $u = \frac{-1+\sqrt{1+ab}}{b} = -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a}{b}}$ liegt im u-Intervall $[0; \sqrt{\frac{a}{b}}]$ wegen:

$$-\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a}{b}} \ge -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2}} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = 0$$

$$-\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{a}{b}} \le -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (wegen: $\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$; $x, y \ge 0$).

Mit $u = \frac{-1+\sqrt{1+ab}}{b}$ ist: $g = 2u = \frac{-2+2\sqrt{1+ab}}{b} = h = f(u)$, so dass für die Quadratfläche folgt:

$$A_Q = \left(\frac{-2+2\sqrt{1+ab}}{b}\right)^2 = \frac{4}{b^2}\left(-1+\sqrt{1+ab}\right)^2 = \frac{4}{b^2}\left(1-2\sqrt{1+ab}+1+ab\right) = \frac{4}{b^2}\left(2-2\sqrt{1+ab}+ab\right).$$