Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben seien die zwei Funktionen $f(x) = 10xe^{-x}$ und $g(x) = 5x^2e^{-x}$.

a) Zeige, dass es zwei Stammfunktion F(x) zu f(x) und G(x) zu g(x) gibt, so dass die Gleichung

$$F(x) – G(x) = g(x)$$

erfüllt ist.

b) Bestimme die Schnittpunkte zwischen den beiden Funktionen f(x) und g(x). Bestimme den Inhalt der von den beiden Funktionskurven eingeschlossenen Fläche.

c) Die Senkrechte x = u, $0 \le u \le 2$, schneidet die Funktionskurven von f(x) und g(x) in den Punkten P und Q. Die beiden Punkte bilden zusammen mit Ursprung O des x-y-Koordinatensystems ein Dreieck. Berechne, wie groß der Flächeninhalt dieses Dreiecks für u = 0,5 ist. Berechne außerdem, für welches u ist der Dreieckflächeninhalt maximal wird. Um wie viel übersteigt der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen den maximalen Dreieckflächeninhalt?

d) Für $x \ge 2$ schließen die beiden Funktionen f(x) und g(x) eine unendlich lange Fläche ein. Berechne den Inhalt dieser Fläche. Was fällt auf?

Lösung: a) Sind F(x) und G(x) zwei Stammfunktionen von f(x) bzw. g(x), so gilt selbstverständlich zunächst: F'(x) = f(x), G'(x) = g(x). Wir definieren die Differenzfunktion: D(x) = F(x) – G(x) – g(x) und leiten diese mit $g'(x) = 10xe^{-x} + 5x^2(-e^{-x}) = 10xe^{-x} – 5x^2e^{-x} = (10x-5x^2)e^{-x}$ ab zu:

$D'(x) = F'(x) – G'(x) – g'(x) = f(x) – g(x) – g'(x) = 10xe^{-x} – 5x^2e^{-x} – (10x-5x^2)e^{-x} = 10xe^{-x} – 5x^2e^{-x} – 10xe^{-x} + 5x^2e^{-x} = 0$.

Ist die Ableitung D'(x) von D(x) aber null, so muss D(x) eine Konstante sein. Es gilt damit: D(x) = C für ein reelles C. Nun sind $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ und $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ (als Funktionen der oberen Grenze) zwei Stammfunktionen mit F(0) = 0 und G(0) = 0, so dass hier mit g(0) = 0:

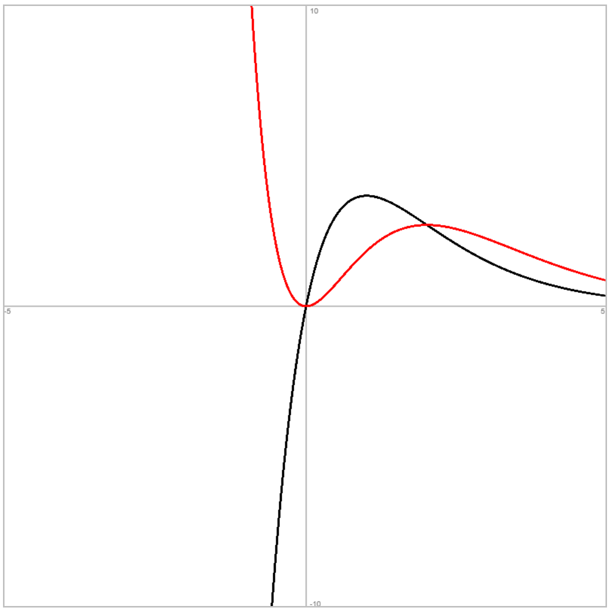
D(0) = F(0) – G(0) – g(0) = 0 – 0 – 0 = 0

gilt. Wegen der Konstanz von D(x) mit D(x) = C folgt schließlich:

D(x) = C = D(0) = 0 => F(x) – G(x) – g(x) = 0 => F(x) – G(x) = g(x),

womit die Beziehung nachgewiesen worden ist.

b) I. Die <u>Graphen</u> (Kurven) der beiden Funktionen $f(x) = 10xe^{-x}$ und $g(x) = 5x^2e^{-x}$ verlaufen wie folgt:



II. Die Berechnung der Schnittpunkte zwischen den beiden Funktionen geschieht wie folgt:

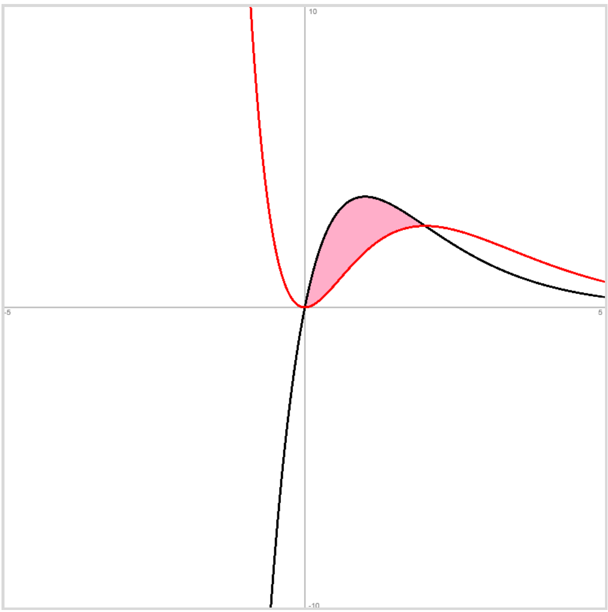
$f(x) = g(x)$	
$10xe^{-x} = 5x^2e^{-x}$	$\mid -5x^2e^{-x}$
$10xe^{-x} – 5x^2e^{-x} = 0$	(Ausklammern)
$(10x-5x^2)e^{-x} = 0$	$\mid \cdot e^x$
$10x – 5x^2 = 0$	(Ausklammern)
$x(10-5x) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 10-5x = 0$	$\mid +5x$
$x = 0,\ 10 = 5x$	$\mid :5$
$x = 0,\ x = 2$	

Die Funktionen f(x) und g(x) schneiden sich also an den Stellen: x=0, x=2. Die Schnittpunkte erhalten wir durch Einsetzen der gefundenen x-Werte in f(x):

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ Schnittpunkt $S_1(0|0)$
$x = 2 \Rightarrow f(2) = 20e^{-2} \Rightarrow$ Schnittpunkt $S_2(2|20e^{-2})$.

III. Auf der Grundlage von II. und von Teilaufgabe a) können wir den Inhalt der von den beiden Funktionskurven eingeschlossenen Fläche A_1 errechnen. Es ist:

$$A_1 = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = [F(x) - G(x)]_0^2 = [g(x)]_0^2 = g(2) - g(0) = 20e^{-2} – 0 = 20e^{-2} \approx 2{,}707.$$

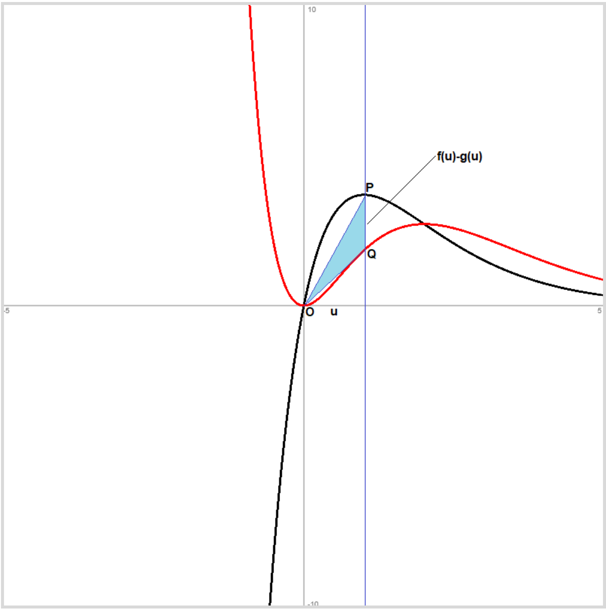


Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also: $A_1 = 2{,}707$ FE.

c) I. Die Dreieckfläche A_Δ berechnet sich allgemein gemäß der Formel: $A_\Delta = \frac{1}{2}gh$ mit g als Grundseite und h als Höhe des Dreiecks. Bezogen auf das Dreieck ΔOPQ ist für ein gewisses u, 0≤u≤2: g = f(u) – g(u), h = u, so dass die <u>Funktion des Dreieckflächeninhalts</u> A(u) wie folgt lautet:

$A(u) = \frac{1}{2}(f(u)-g(u))\cdot u = \frac{1}{2}u(10ue^{-u} - 5u^2e^{-u}) = 5u^2e^{-u} - 2{,}5u^3e^{-u} = (5u^2-2{,}5u^3)e^{-u}$.

II. Es ergibt sich für <u>u=0,5</u> der Flächeninhalt:
$A(0{,}5) = (5\cdot 0{,}5^2-2{,}5\cdot 0{,}5^3)e^{-0{,}5} = 0{,}9375e^{-0{,}5} = 0{,}569$ FE.



III. Der <u>maximale Flächeninhalt</u> der u abhängigen Dreiecke ΔOPQ errechnet sich als globales Maximum der Funktion $A(u) = (5u^2-2{,}5u^3)e^{-u}$ im Intervall 0≤u≤2. Wir leiten daher zunächst ab und erhalten nach Produkt- und Kettenregel:

$A'(u) = (10u-7{,}5u^2)e^{-u} + (5u^2-2{,}5u^3)(-e^{-u}) = (10u-7{,}5u^2-5u^2+2{,}5u^3)e^{-u} = (2{,}5u^3-12{,}5u^2+10u)e^{-u}$
$A''(u) = (7{,}5u^2-25u+10)e^{-u} + (2{,}5u^3-12{,}5u^2+10u)(-e^{-u})$.

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$A'(u) = 0$	
$(2{,}5u^3-12{,}5u^2+10u)e^{-u} = 0$	$\mid \cdot e^u$
$2{,}5u^3-12{,}5u^2+10u = 0$	(Ausklammern)
$u(2{,}5u^2-12{,}5u+10) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$u = 0,\ 2{,}5u^2-12{,}5u+10 = 0$	$\mid :2{,}5$
$u = 0,\ u^2-5u+4 = 0$	(abc-Formel: a=1, b=-5, c=4)

$u = 0,\ u = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm 3}{2}$

u = 0, u = 4, u = 1.

Die Stelle u=4 liegt nicht im Intervall 0≤u≤2, für u=0 als Randstelle des Intervalls gilt. A(0) = 0, ebenso für die weitere Randstelle u=2 mit A(2) = 0. An der Stelle u=1 liegt auf Grund von

$A''(1) = (7{,}5-25+10)e^{-1} + 0 = -7{,}5e^{-1} < 0$

ein lokales Maximum vor, das wegen A(0) = A(2) = 0 gleichzeitig global für 0≤u≤2 ist.

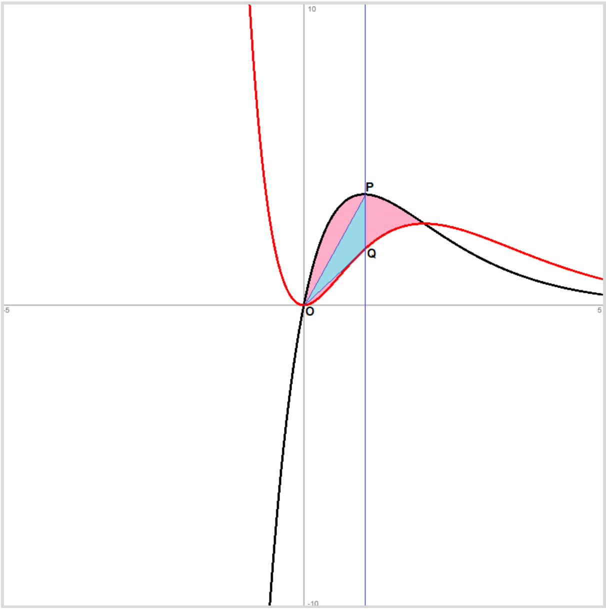
IV. Es gilt:

$A_2 = A(1) = (5-2{,}5)e^{-1} = 2{,}5e^{-1} = 0{,}92$ FE.

Damit ist die noch zu bestimmende <u>Flächendifferenz</u>

$A_{Differenz} = A_1 - A_2 = 2{,}707 - 0{,}92 = 1{,}787$ FE

groß.



d) Wir beziehen uns auf die Teilaufgaben a) und b) und haben im Fall der Existenz das <u>uneigentliche Integral</u> bei g(x) ≥ f(x) auf dem Intervall [2; ∞)

$A_3 = \int_2^{\infty} (g(x) - f(x))dx$

zu berechnen. Dies geschieht mittels der Einführung einer Integralgrenze x = z, z≥2, so dass sich zunächst als bestimmtes Intergral die Fläche

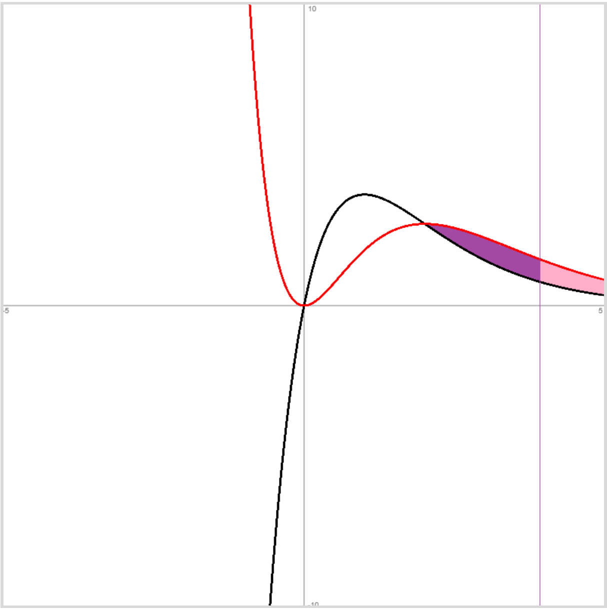
$A_3(z) = \int_2^{z} (g(x) - f(x))dx = [G(x) - F(x)]_2^z = [-g(x)]_0^z = -g(z) + g(2) =$ $-20e^{-z} + 20e^{-2}$

ergibt. Für z -> ∞ folgt wegen $-20e^{-z} = 20/e^z$ -> 0 die Existenz des uneigentlichen Integrals:

$A_3(z) = --20e^{-z} + 20e^{-2}$ -> $-0 + 20e^{-2} = 20e^{-2} = A_3$.

Es sind auch die beiden Flächen A_1 und A_3 betragsmäßig gleich groß, es gilt weiter:

$A_1 + A_3 = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} (f(x) - g(x))dx = 0$.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1005