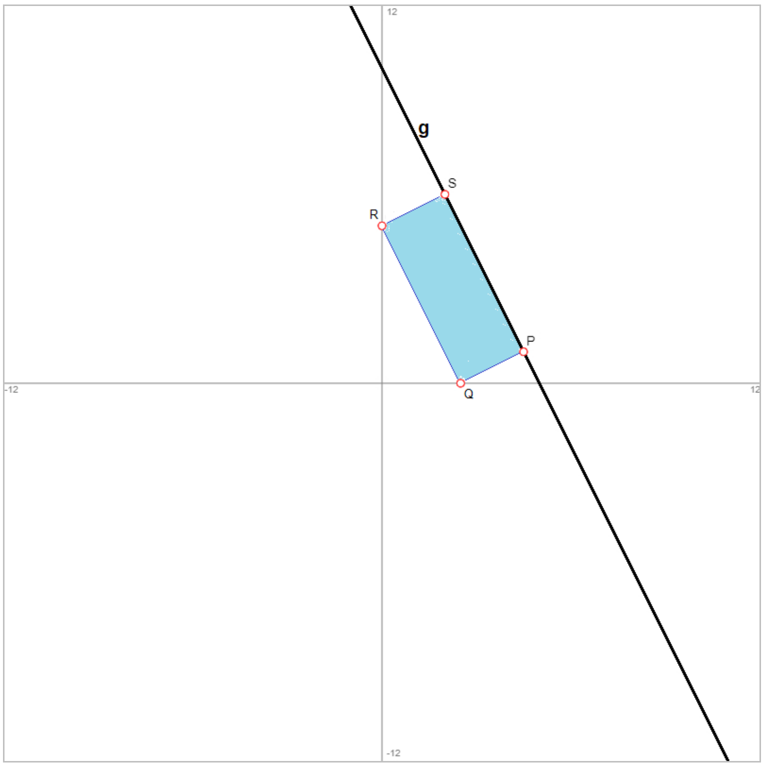
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Zur Geraden g: $y = -2x + 10$ soll im x-y-Koordinatensystem ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt so bestimmt werden, dass eine Rechteckseite auf der Geraden liegt, die gegenüberliegenden Ecken des Rechtecks sich auf den Achsen des Koordinatensystems befinden.



Lösung: I. Auf der Geraden g: $y = -2x + 10$ nehmen wir den Punkt $P(u|-2u+10)$ an mit: $0 \leq u \leq 5$ an ($u=0$: y-Achsenabschnitt der Geraden, $u=5$: Nullstelle der Geraden). Vom Punkt P aus konstruieren wir die zwei Punkte Q, R des in der Zeichnung angegebenen Rechtecks PQRS. Der Abstand zwischen den Punkten P und Q gibt dann die Breite b, der Abstand zwischen Q und R die Länge a des Rechtecks an, so dass für ein gewisses u, d.h. gewisse Punkte P, Q, R der Flächeninhalt des Rechtecks als $A_R = a \cdot b$ bestimmt werden kann.

II. Auf Grund der rechten Winkel im Rechteck steht die Gerade h durch die Punkte P und Q senkrecht auf g. Die Konstruktion der auf g senkrechten Geraden h: $y = m_h x + c_h$ erfolgt dann mit:

$m = -1/m_g = -1/(-2) = 1/2 = 0{,}5$ (mit $m_g = -2$ als Steigung der Geraden g),

so dass $y = 0{,}5x + c_h$ gilt. Die Größe c_h bestimmt sich durch Einsetzen des Punktes $P(u|-2u+10)$ in die Geradengleichung von h:

$-2u+10 = 0{,}5u + c_h \Leftrightarrow -2{,}5u+10 = c_h$.

Damit lautet die von u abhängige Geradengleichung:

h: y = 0,5x – 2,5u + 10.

Der Punkt Q liegt nach Aufgabenstellung auf der x-Achse, ist also die Nullstelle der Geraden h. Wir rechnen:

y = 0 ⇔ 0,5x – 2,5u + 10 = 0 ⇔ 0,5x = 2,5u – 10 ⇔ x = 5u – 20.

Als Ecke des Rechtecks ergibt sich damit: Q(5u-20|0).

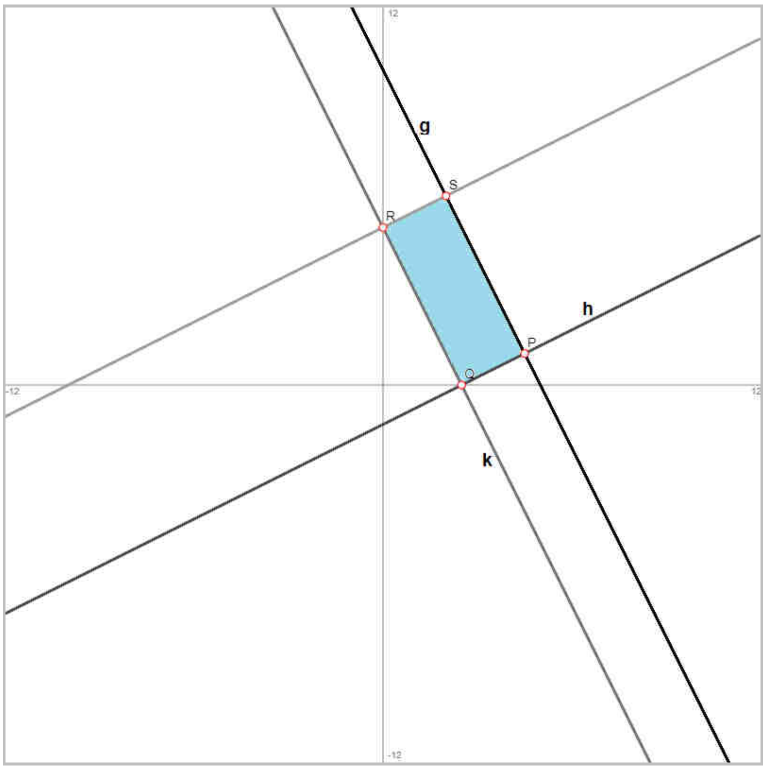
III. Die Gerade k verläuft durch die Punkt Q und R, wobei R auf der y-Achse des Koordinatensystems liegt. Die Gerade k: y = m_kx + c_k ist auf Grund der Parallelität gegenüberliegender Seiten im Rechteck parallel zur Geraden g, besitzt also die Steigung m_k = -2, so dass y = -2x + c_k erfüllt ist. Zur Bestimmung von c_k rechnen wir, indem wir den Punkt Q(5u-20|0) in die Geradengleichung von k einsetzen:

0 = -2(5u-20) + c_k ⇔ 2(5u-20) = c_k ⇔ 10u-40 = c_k.

Damit lautet die von u abhängige Geradengleichung:

k: y = -2x + 10u – 40.

Der Punkt R liegt nach Aufgabenstellung auf der y-Achse, kennzeichnet also den y-Achsenabschnitt der Geraden k. Einsetzen von x = 0 in die Geradengleichung führt auf den gesuchten Punkt R(0|10u-40). (Nur fakultativ geben wir die Gerade durch die Punkte R und S mit: y = 0,5x + 10u – 40 an.)



IV. Die Abstandsformel zwischen zwei Punkten P(x_1|y_1), Q(x_2|y_2) im x-y-Koordinatensystem lautet (gemäß dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck im x-y-Koordinatensystem [1. Kathete: horizontale Differenz der x-Werte der Punkte, 2. Kathete: vertikale Differenz der y-Werte der Punkte, Hypotenuse: Abstand zwischen den Punkten]):

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Wir bestimmen die Abstände zwischen den Ecken Pund Q bzw. Q und R des Rechtecks gemäß der Abstandsformel. Und zwar gilt hinsichtlich der Punkte P(u|-2u+10) und Q(5u-20|0):

$$\overline{PQ} = \sqrt{(u-(5u-20))^2 + ((-2u+10)-0)^2} = \sqrt{(-4u+20)^2 + (-2u+10)^2} =$$

$$\sqrt{16u^2 - 160u + 400 + 4u^2 - 40u + 100} = \sqrt{20u^2 - 200u + 500} = \sqrt{20}\cdot\sqrt{u^2 - 10u + 25} =$$

$$\sqrt{20}\cdot\sqrt{(u-5)^2} = \sqrt{20}|u-5| = \sqrt{20}\cdot(-(u-5)) = -\sqrt{20}(u-5) = b$$

(zu beachten ist, dass u ≤ 5 vorausgesetzt wird, so dass nur -(u-5) nichtnegativ und damit ein Abstand ist). Entsprechend errechnet sich für die Ecken Q(5u-20|0) und R(0|10u-40) als Abstand:

$\overline{QR} = \sqrt{((5u-20)-0)^2 + (0-(10u-40))^2} = \sqrt{(5u-20)^2 + (-10u+40)^2} =$

$\sqrt{25u^2 - 200u + 400 + 100u^2 - 800u + 1600} = \sqrt{125u^2 - 1000u + 2000} = \sqrt{125} \cdot \sqrt{u^2 - 8u + 16} =$

$\sqrt{125} \cdot \sqrt{(u-4)^2} = \sqrt{125}|u-4| = \sqrt{125}(u-4) = a$

(da – siehe V. – u ≥ 4 gelten muss).

V. Der von u abhängige <u>Flächeninhalt</u> A_R des Rechtecks PQRS bestimmt sich nun wie folgt:
$A_R = a \cdot b = \sqrt{125}(u-4) \cdot (-\sqrt{20}(u-5)) = -\sqrt{2500}(u-4)(u-5) = -50(u^2 - 9u + 20) = A(u)$.

Die Flächenfunktion A(u), eine Parabel 2. Grades, ist gemäß unserem Ansatz nichtnegativ für 4 ≤ u ≤ 5. Bei u = 4 und u = 5 liegen die Nullstellen der Parabel vor; es gilt. A(4) = 0, A(5) = 0. Zwischen den Nullstellen hat die nach unten geöffnete Parabel offensichtlich einen Hochpunkt.

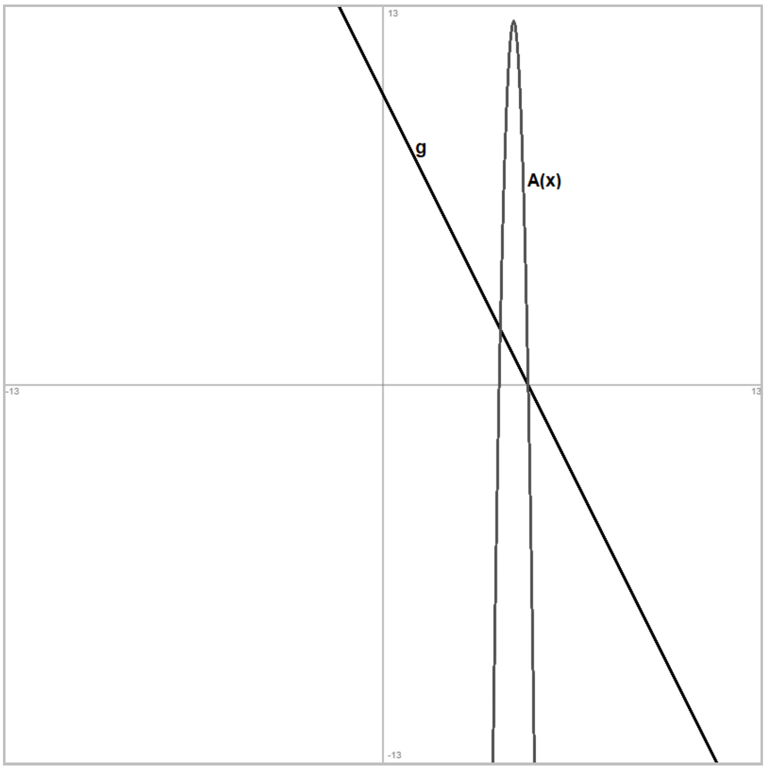
VI. Den <u>maximalen Flächeninhalt</u> erhalten wir durch Bildung und Nullsetzen der 1. Ableitung der Flächenfunktion A(u). Wir rechnen:

$A'(u) = -50(2u-9)$ ->

A'(u) = 0 ⇔ -50(2u-9) = 0 ⇔ 2u-9 = 0 ⇔ 2u = 9 ⇔ u = 4,5.

Wegen A''(u) = -50·2 = -100 < 0, auch bei A''(4,5) liegt ein (lokales) Maximum vor. Der maximale Flächeninhalt ist dann:

$A(4{,}5) = -50(4{,}5^2 - 9 \cdot 4{,}5 + 20) = -50 \cdot (-0{,}25) = 12{,}5$ FE.



VII. Mit u = 4,5 erhalten wir noch als <u>Ecken</u> des flächenmaximalen Rechtecks PQRS: P(4,5|1), Q(2,5|0), R(0|5), S(2|6). Die <u>Länge</u> des Rechtecks beträgt: $a = \sqrt{125}(4{,}5-4) = 0{,}5\sqrt{125} = 2{,}5\sqrt{5}$ LE, die Breite: $b = -\sqrt{20}(4{,}5-5) = 0{,}5\sqrt{20} = \sqrt{5}$ LE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 09.2022 / Aufgabe 1704