Michael Buhlmann

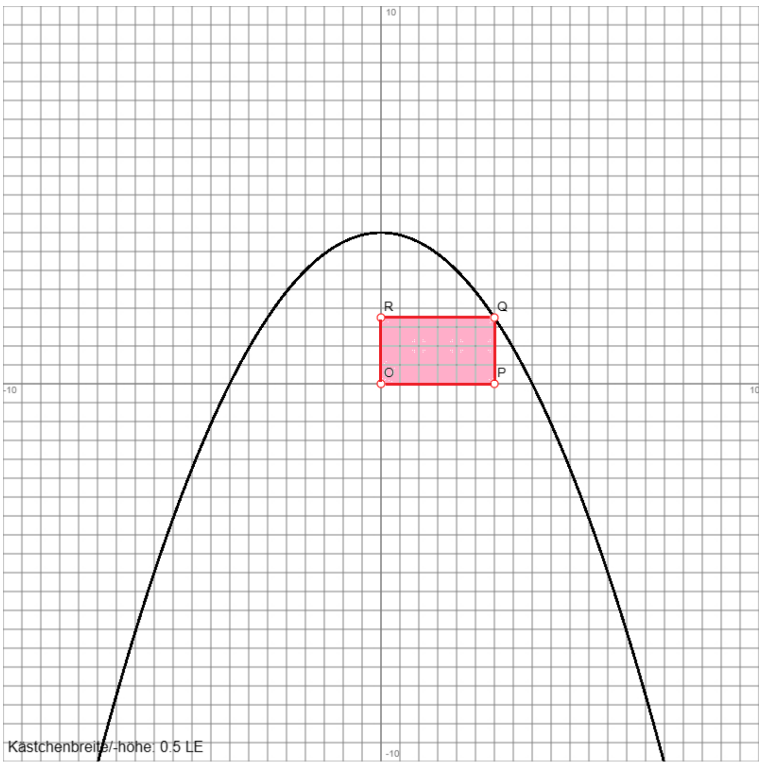
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = -0{,}25x^2 + 4$.

a) Ein achsenparalleles Rechteck soll im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems so der Funktion f(x) einbeschrieben werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks am größten wird. Bestimme den maximalen Flächeninhalt dieses Rechtecks.

b) Ein achsenparalleles Rechteck soll im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems so der Funktion f(x) einbeschrieben werden, dass der Umfang des Rechtecks am größten wird. Bestimme den maximalen Umfang dieses Rechtecks.

c) Ein achsenparalleles Quadrat soll im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems der Funktion f(x) einbeschrieben werden. Berechne Flächeninhalt und Umfang dieses Quadrats.



Lösung: a) Das Rechteck besitze mit $0 \le u \le 4$ (positive Nullstelle von f(x) bei x = 4) die Ecken O(0|0), P(u|0), Q(u|f(u)), R(0|f(u)), wobei der Punkt Q auf der Funktion f(x) liegt. Die Rechteckfläche berechnet sich als $A = a \cdot b$ mit Rechtecklänge a und -breite b. Nun ist im Rechteck OPQR: $a = u$, $b = f(u)$, so dass sich als <u>Funktion des Flächeninhalts</u> in Abhängigkeit von u ergibt:

$A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot (-0{,}25u^2+4) = -0{,}25u^3 + 4u$.

Das Maximum des Flächeninhalts berechnen wir, indem wir die 1. Ableitung der Funktion A(u) bilden und gleich Null setzen:

$A'(u) = -0{,}75u^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0{,}75u^2 \Leftrightarrow 16/3 = u^2 \Leftrightarrow u = 4/\sqrt{3}$ (wegen u>0).

Einsetzen in die 2. Ableitung $A''(u) = -1{,}5u$ ergibt: $A''(4/\sqrt{3}) = -6/\sqrt{3} < 0$ und damit ein relatives Maximum der Funktion A(u). Der Vergleich mit den Randstellen des Intervalls [0; 4], auf dem die Rechtecklänge u definiert ist, ergibt: $A(0) = 0$, $A(4/\sqrt{3}) = 4/\sqrt{3}(-0{,}25 \cdot 16/3 + 4) = 32\sqrt{3}/9$, $A(4) = 0$, so dass $u = 4/\sqrt{3}$ auch für ein globales Maximum steht. Der <u>maximale Flächeninhalt</u> des Rechtecks OPQR ist damit: $A(4/\sqrt{3}) = 32\sqrt{3}/9$ FE.

b) Hinsichtlich des Umfangs des achsenparallelen Rechtecks OPQR betrachten wir wegen des Rechteckumfangs $U = 2a+2b$ bei Rechtecklänge a und -breite b die <u>Funktion des Umfangs</u>:

$U(u) = 2u + 2f(u) = 2u + 2(-0{,}25u^2+4) = 2u - 0{,}5u^2 + 8 = -0{,}5u^2 + 2u + 8,\ 0 \le u \le 4.$

Die 1. und 2. Ableitung von U(u) lauten: $U'(u) = -u +2$, $U''(u) = -1$. Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$U'(u) = 0 \Leftrightarrow -u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = 2$

mit: $U'(2) = -1 < 0$, so dass ein lokales Maximum des Umfangs vorliegt. Ein Vergleich mit den u als Randstellen des Intervalls [0; 4] führt auf:

$U(0) = 8,\ U(2) = -0{,}5\cdot 4 + 2\cdot 2 + 8 = 10,\ U(4) = -0{,}5\cdot 16 + 2\cdot 4 + 8 = 8,$

so dass an der u = 2 der Umfang U(u) ein globales Maximum annimmt. Der maximale Umfang des Rechtecks OPQR ist damit: U(2) = 10 LE.

c) Für das Rechteck OPQR mit Rechtecklänge a und -breite b muss im Falle eines Quadrats a = b gelten, also: u = f(u). Wir formen dann um:

$u = f(u) \Leftrightarrow u = -0{,}25u^2 + 4 \Leftrightarrow 0{,}25u^2 + u - 4 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 4u - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$$u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-16)}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5}\,.$$

Es gilt $u = -2 + 2\sqrt{5} = 2{,}47$ (wegen $u>0$) und damit: $-2+2\sqrt{5} = f(-2+2\sqrt{5})$. Flächeninhalt und Umfang des Quadrats sind folglich:

$A_Q = (-2+2\sqrt{5})^2 = 24 - 8\sqrt{5} = 6{,}11$ FE
$U_Q = 4\cdot(-2+2\sqrt{5}) = -8 + 8\sqrt{5} = 9{,}89$ LE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 04.2023 / Aufgabe 1831