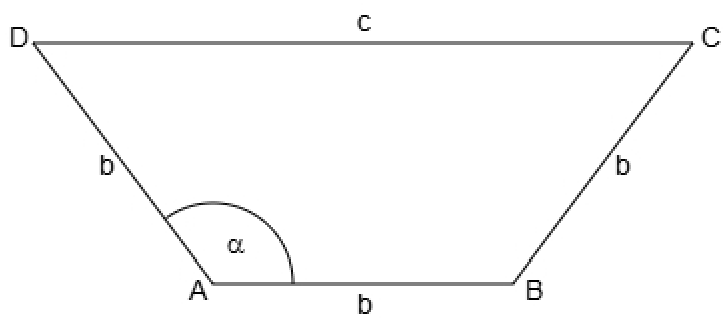
Michael Buhlmann

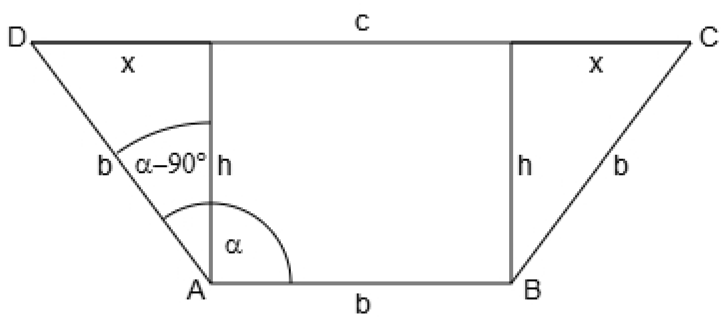
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist das nachstehende gleichschenklige Trapez ABCD mit den Seitenlängen b und c und dem Winkel α. Es soll der Winkel α so ermittelt werden, dass das Trapez den größten Flächeninhalt besitzt.



Lösung: I. Ein Trapez als Viereck mit zwei parallelen Seiten a, c und Höhe h genügt für den Flächeninhalt der Formel:

$$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h \quad (*)$$



Angewendet auf das obige Trapez, folgt unter Bestimmung der Höhe h und der Teilstrecke x (mit: b + 2x = c auf Grund der Gleichschenkligkeit des Trapezes) gemäß:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow c = b + 2 \cdot b \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

(der Winkel α wird in Bogenmaß gerechnet [π/2 entspricht 90°]) aus der Formel (*):

$$A_{Trapez} = \frac{b+b+2\cdot b\cdot \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\cdot b\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2b+2b\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\cdot b\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\left(b+b\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot b\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = b^2\left(1+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$b^2\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = b^2\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

mit der Flächenfunktion A(α) als zu maximierender Funktion bei π/2≤α≤π (α wird als stumpfer Winkel vorausgesetzt).

II. Die Maximierung der Flächenfunktion A(α) führt auf eine Extremwertaufgabe, so dass die 1. Ableitung A'(α) zu berechnen ist. Wir verwenden dazu vornehmlich die Produktregel, der Faktor b^2 ist ein konstanter Faktor. Wir rechnen:

$$A(\alpha) = b^2\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow$$

$$A'(\alpha) = b^2\left(-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$

$$b^2\left(-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\underset{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{=}$$

$$b^2\left(-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right) = b^2\left(-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)$$

und setzten A'(α) = 0 zwecks Bestimmung der Extremstelle:

A'(α) = 0

$b^2\left(-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+1\right) = 0$ | $:b^2$

$-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+1 = 0$ (Substitution: z = $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$)

$-2z^2 - z + 1 = 0$ | :(-1)

$2z^2 + z - 1 = 0$ (abc-Formel: a=2, b=1, c=-1)

$$z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}$$

$z_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $z_2 = \frac{-1+3}{4} = 0{,}5$ (Rücksubstitution: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ = z)

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ = -1, $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ = 0,5.

Die erste der beiden Sinusgleichungen hat als Lösung:

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \alpha = 2\pi$,

die zweite die Lösungen:

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5 \Leftrightarrow \alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6},\ \alpha-\frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}\pi,\ \alpha = \frac{4}{3}\pi$.

Wegen der vorausgesetzten Stumpfheit des Winkels α fallen die Lösungen α = $\frac{4}{3}\pi$ und α = 2π weg, so dass nur im Folgenden nur die Randstellen des Intervalls [π/2; π] und α = $\frac{2}{3}\pi$ zu betrachten sind. Das globale Maximum auf dem Intervall [π/2; π] liegt somit an der Stelle α mit dem größten Wert der Flächenfunktion A(α) (die 2. Ableitung A''(α) muss nicht betrachtet werden). Es ist:

$$A(\frac{\pi}{2}) = b^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = b^2\left(\cos(0)+\sin(0)\cos(0)\right) = b^2(1+0) = b^2$$

(hier liegt ein Quadrat mit Seitenlänge b vor)

$$A(\frac{2}{3}\pi) = b^2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right) = b^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$b^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = b^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = b^2\cdot\frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}b^2\sqrt{3}$$

$$A(\pi) = b^2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right) = b^2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$b^2(0+0) = 0$$

(das Trapez ist eine Strecke der Länge 3b).

Maximaler Funktionswert und damit <u>maximaler Flächeninhalt</u> ist: $A(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{4}b^2\sqrt{3}$. Der Winkel α beträgt hierbei: α = 120°.

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2223