

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Funktionen

**Aufgabe:** Gegeben sei die Funktion

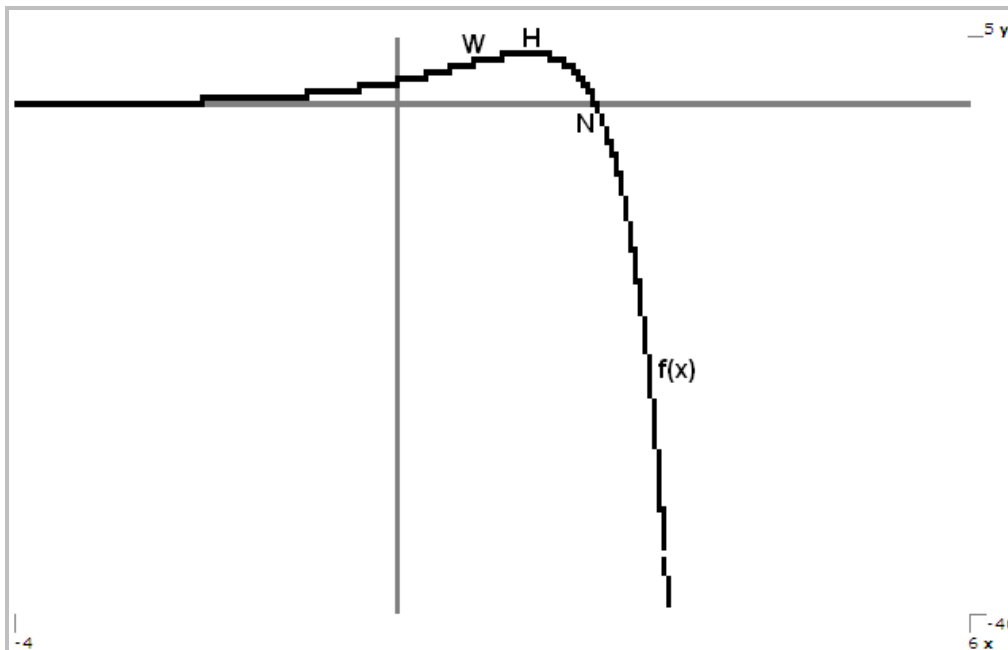
$$f(x) = 2e^x - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

- Skizziere die Funktion im Koordinatensystem.
- Berechne exakt die Schnittpunkte der Funktion mit Achsen des Koordinatensystems.
- Untersuche die Funktion auf Monotonie durch exakte Bestimmung der Monotonieintervalle.
- Bestimme die Fläche zwischen der Funktion und der Gerade durch die Achsenschnittpunkte der Funktion.
- Eine Tangente an die Funktion hat dieselbe Steigung wie die Gerade durch die Achsenschnittpunkte der Funktion. Wie lauten Berührungspunkt und Nullstelle dieser Tangente?

**Lösung:** a) Das Aufstellen der Wertetabelle ergibt z.B.:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	1.75	1.5	1	Schnittpunkt $S_y(0 1.75)$
0.69	2.9937	2	0.01	Wendepunkt $W(0.69 2.99)$
1.385	4	0	-7.97	Hochpunkt $H(1.39 4)$
2.075	0	-15.79	-47.51	Nullstelle $N(2.08 0.07)$

Der Funktionsgraph hat damit das Aussehen:



b) Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich aus:  $f(0) = 1,75$  als:  $S_y(0|1,75)$ , mit der x-Achse wegen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \frac{1}{4}e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 8e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 8 - e^x = 0 \Leftrightarrow 8 = e^x \Leftrightarrow x = \ln 8$$

als:  $N(\ln 8|0)$ .

c) Wir berechnen den Hochpunkt der Funktion  $f(x)$ , da hier die Monotonie wechselt. Zunächst gilt für die Ableitungen:

$$f(x) = 2e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 2e^x - e^{2x}.$$

Am Hochpunkt besitzt die Funktion  $f(x)$  eine waagerechte Tangente, also:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4 - e^x = 0 \Leftrightarrow 4 = e^x \Leftrightarrow x = \ln 4$$

Wegen  $f''(\ln 4) = 2e^{\ln 4} - e^{2\ln 4} = 2e^{\ln 4} - e^{\ln 16} = 2 \cdot 4 - 16 = -8 < 0$  liegt bei  $x = \ln 4$  in der Tat ein Hochpunkt vor. Es ergeben sich daher die Monotonieintervalle:

$(-\infty; \ln 4)$ :  $f(x)$  monoton steigend ( $x = \ln 4$  Hochpunkt)

$(\ln 4; \infty)$ :  $f(x)$  monoton fallend ( $x = \ln 4$  Hochpunkt).

d) Aus den Achsenschnittpunkten  $S_y(0|1,75)$  und  $N(2,075|0)$  ergibt sich mit dem Differenzenquotienten die Geradensteigung  $m$  als:

$$m = \frac{y_{S_y} - y_N}{x_{S_y} - x_N} = \frac{1,75 - 0}{0 - 2,075} = -0,843,$$

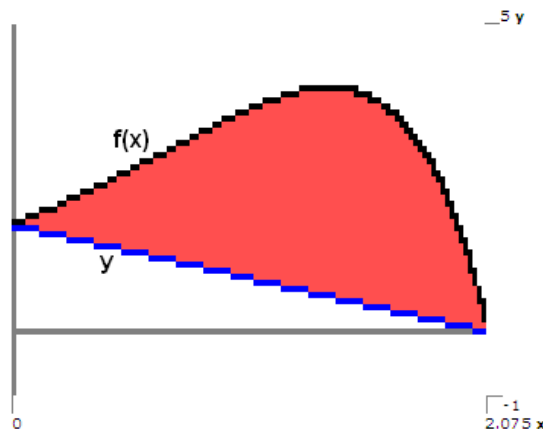
weiter der y-Achsenabschnitt der Gerade  $y = mx + c$  vermöge der Punktprobe mit  $S_y(0|1,75)$ :  $c = 1,75$ . Die Gleichung der Geraden lautet also:  $y = -0,843x + 1,75$ .

Die gesuchte Fläche lässt sich als Fläche zwischen der Funktion  $f(x)$  und der der Gerade  $y$  in den Grenzen  $a=0$  und  $b=2,075$  auffassen, so dass das Integral

$$A = \int_a^b (f(x) - y) dx = \int_0^{2,075} \left[ \left( 2e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \right) - (-0,843x + 1,75) \right] dx$$

zu bestimmen ist. Es gilt:

$$A = 4,3084 \text{ FE.}$$



e) Wir ermitteln zunächst den Berührungspunkt  $B(x_B|y_B)$  der gesuchten Tangente, denn dort gilt mit der Achsenschnittpunktgeraden  $y = -0,843x + 1,75$ :

$$f'(x_B) = y',$$

also:

$$f'(x) = -0,843 \Leftrightarrow 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} = -0,843 \Leftrightarrow x = 1,48$$

Der Berührungspunkt lautet mit  $x_B=1,48$  und  $y_B=f(1,48)=3,96$ :  $B(1,48|3,96)$ .

Wir bestimmen im Berührungspunkt  $B$  die Tangente an die Funktion  $f(x)$  vermöge des Ansatzes:

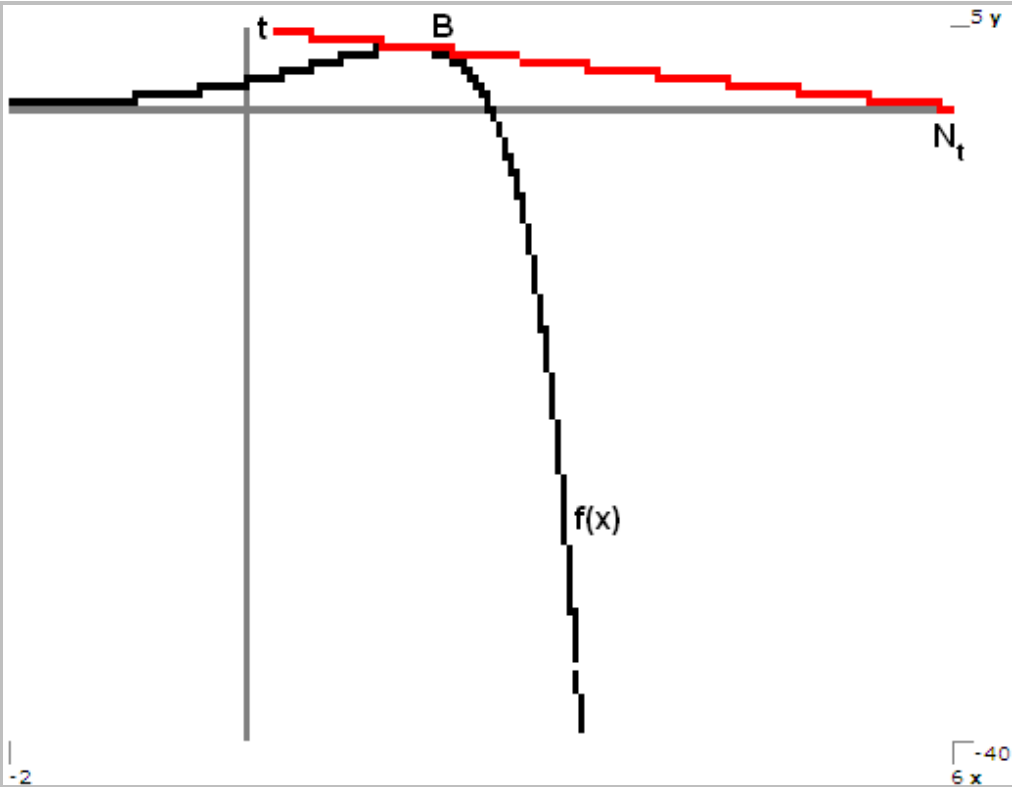
$$t: y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B) = f'(1,48)(x - 1,48) + f(1,48) \text{ (Tangentengleichung)}$$

$$\text{als: } y = -0,843x + 5,21.$$

Die Nullstelle der Tangente errechnet sich dann mit:

$$y = 0 \Leftrightarrow -0,843x + 5,21 = 0 \Leftrightarrow x = 6,13,$$

also:  $N_t(6,13|0)$ .



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 03.2016 / Aufgabe 191