Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionen

Aufgabe: Gegeben sei die Funktion

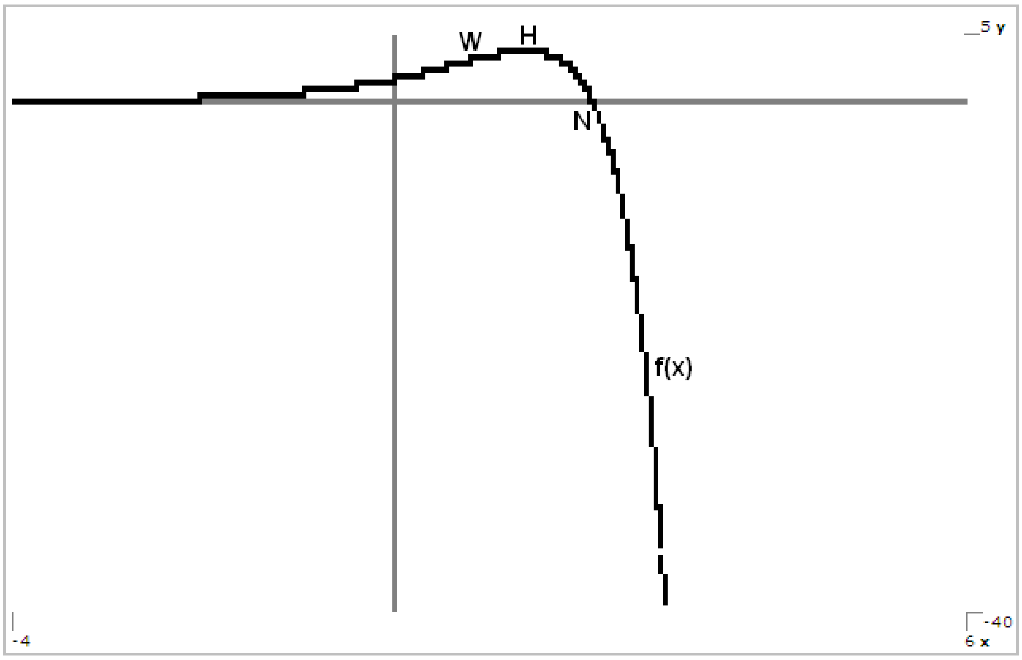
$$f(x) = 2e^{x} - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

a) Skizziere die Funktion im Koordinatensystem.
b) Berechne exakt die Schnittpunkte der Funktion mit Achsen des Koordinatensystems.
c) Untersuche die Funktion auf Monotonie durch exakte Bestimmung der Monotonieintervalle.
d) Bestimme die Fläche zwischen der Funktion und der Gerade durch die Achsenschnittpunkte der Funktion.
e) Eine Tangente an die Funktion hat dieselbe Steigung wie die Gerade durch die Achsenschnittpunkte der Funktion. Wie lauten Berührpunkt und Nullstelle dieser Tangente?

Lösung: a) Das Aufstellen der Wertetabelle ergibt z.B.:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	1.75	1.5	1	Schnittpunkt $S_y(0\|1.75)$
0.69	2.9937	2	0.01	Wendepunkt W(0.69|2.99)
1.385	4	0	-7.97	Hochpunkt H(1.39|4)
2.075	0	-15.79	-47.51	Nullstelle N(2.08|0.07)

Der Funktionsgraph hat damit das Aussehen:



b) Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich aus: f(0) = 1,75 als: $S_y(0|1,75)$, mit der x-Achse wegen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x} - \frac{1}{4}e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 8e^{x} - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 8 - e^{x} = 0 \Leftrightarrow 8 = e^{x} \Leftrightarrow x = \ln 8$$

als: N(ln*8*|0).

c) Wir berechnen den Hochpunkt der Funktion f(x), da hier die Monotonie wechselt. Zunächst gilt für die Ableitungen:

$$f(x) = 2e^x - \frac{1}{4}e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 2e^x - e^{2x}.$$

Am Hochpunkt besitzt die Funktion f(x) eine waagerechte Tangente, also:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4 - e^x = 0 \Leftrightarrow 4 = e^x \Leftrightarrow x = \ln 4$$

Wegen $f''(\ln 4) = 2e^{\ln 4} - e^{2\ln 4} = 2e^{\ln 4} - e^{\ln 16} = 2 \cdot 4 - 16 = -8 < 0$ liegt bei x = ln*4* in der Tat ein Hochpunkt vor. Es ergeben sich daher die Monotonieintervalle:

(-∞; ln*4*): f(x) monoton steigend (x=ln*4* Hochpunkt)
(ln*4*; ∞): f(x) monoton fallend (x=ln*4* Hochpunkt).

d) Aus den Achsenschnittpunkten $S_y(0|1{,}75)$ und N(2,075|0) ergibt sich mit dem Differenzenquotienten die Geradensteigung m als:

$$m = \frac{y_{S_y} - y_N}{x_{S_y} - x_N} = \frac{1{,}75 - 0}{0 - 2{,}075} = -0{,}843,$$

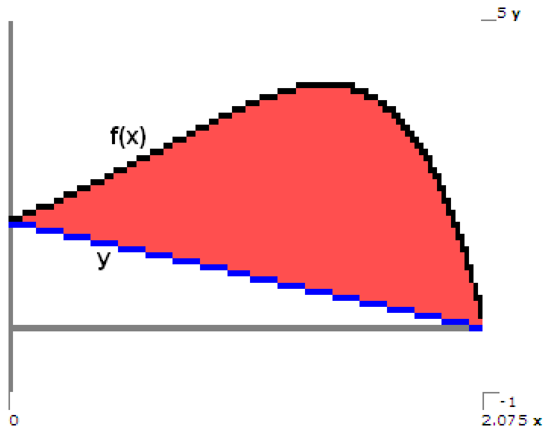
weiter der y-Achsenabschnitt der Gerade y = mx + c vermöge der Punktprobe mit $S_y(0|1{,}75)$:
c = 1,75. Die Gleichung der Geraden lautet also: y = -0,843x+1,75.

Die gesuchte Fläche lässt sich als Fläche zwischen der Funktion f(x) und der der Gerade y in den Grenzen a=0 und b=2,075 auffassen, so dass das Integral

$$A = \int_a^b (f(x) - y)dx = \int_0^{2{,}075} [(2e^x - \frac{1}{4}e^{2x}) - (-0{,}843x + 1{,}75)]dx$$

zu bestimmen ist. Es gilt:

A = 4,3084 FE.



e) Wir ermitteln zunächst den Berührpunkt $B(x_B|y_B)$ der gesuchten Tangente, denn dort gilt mit der Achenschnittpunktgeraden y = -0,843x+1,75:

$f'(x_B) = y'$,

also:

$$f'(x) = -0{,}843 \Leftrightarrow 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} = -0{,}843 \Leftrightarrow x = 1{,}48$$

Der Berührpunkt lautet mit x_B=1,48 und y_B=f(1,48)=3,96: B(1,48|3,96).

Wir bestimmen im Berührpunkt B die Tangente an die Funktion f(x) vermöge des Ansatzes:

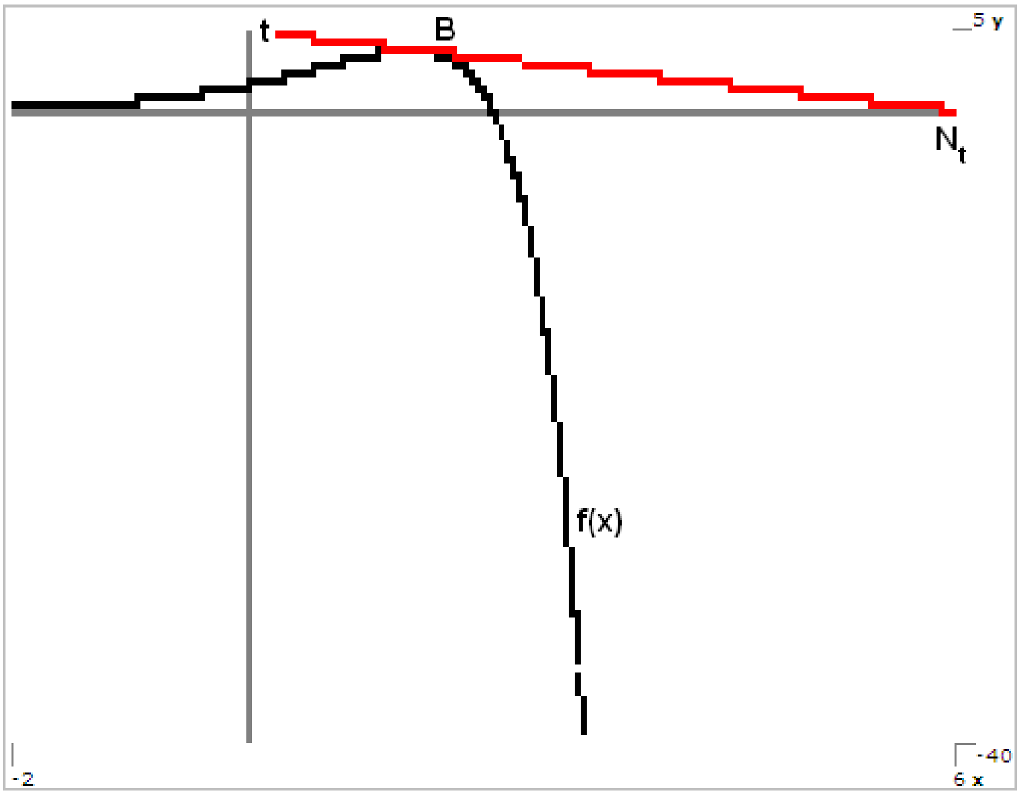
t: $y = f'(x_B)(x-x_B)+f(x_B)$ = f'(1,48)(x-1,48)+f(1,48) (Tangentengleichung)

als: y = -0,843x + 5.21.

Die Nullstelle der Tangente errechnet sich dann mit:

y = 0 ⇔ -0,843x + 5.21 = 0 ⇔ x = 6,13,

also: $N_t(6,13|0)$.



www.michael-buhlmann.de / 03.2016 / Aufgabe 191