Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionsgraphen

Aufgabe: Skizziere den Graphen folgender ganz rationaler Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ b) $f(x) = -x(x+3)$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 8x$ d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-5)$

e) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x$ f) $f(x) = -\frac{3}{8}x^4 + 6x^2$ g) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ h) $f(x) = \frac{1}{10}x^3(x+2)$

Verwende dazu als Eigenschaften der Funktionen: das Verhalten der Funktion f(x) für x -> -∞ und x -> +∞, die eventuell vorhandene Punktsymmetrie zum Ursprung O bzw. Achsensymmetrie zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems, das Vorhandensein und die Art der Nullstellen.

Lösungen: I. Für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades sind folgende Aussagen wahr:

a) Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = a_n (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (x-x_k)^{n_k}$ (als Summe von Potenzen bzw. mit Linearfaktorzerlegung [$n_1+n_2+... = n$; n = grad(f(x)) als Grad der ganz rationalen Funktion, Vielfachheiten n_1, n_2, …der Nullstellen x_1, x_2, …]).

b) Für das Verhalten für x -> -∞ und x -> +∞ gilt die nachstehende Übersicht:

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

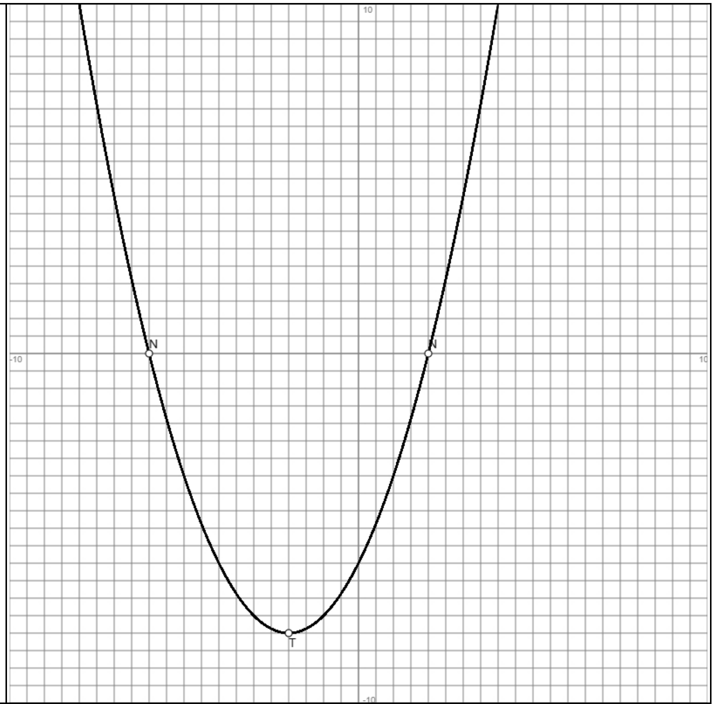
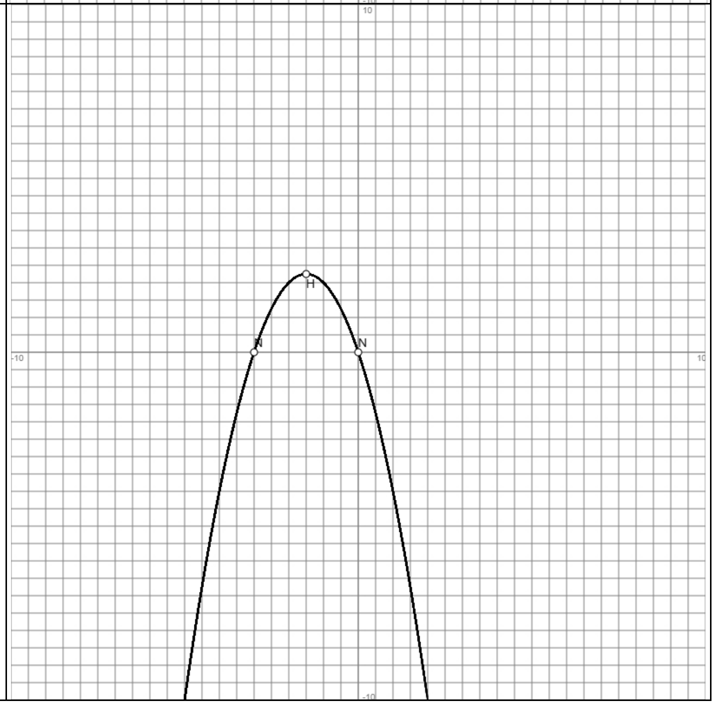
c) Es gilt hinsichtlich der Symmetrie:

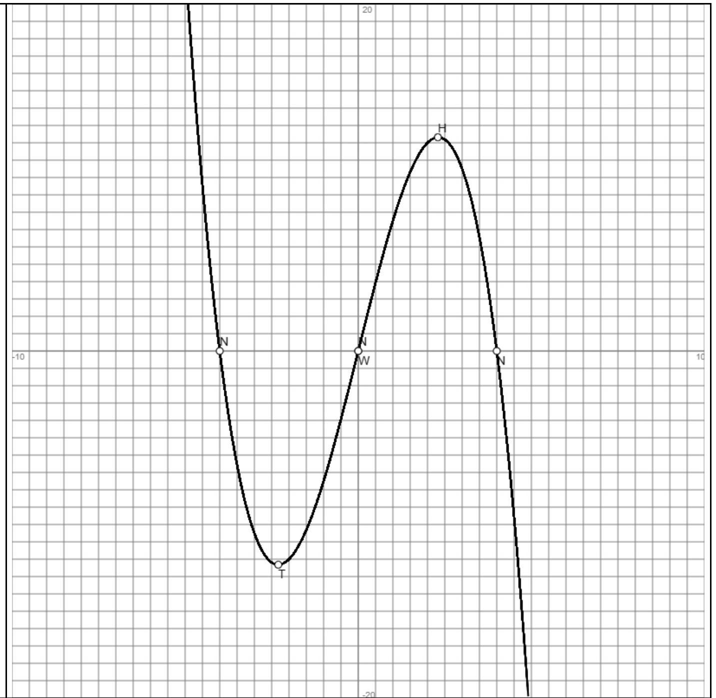
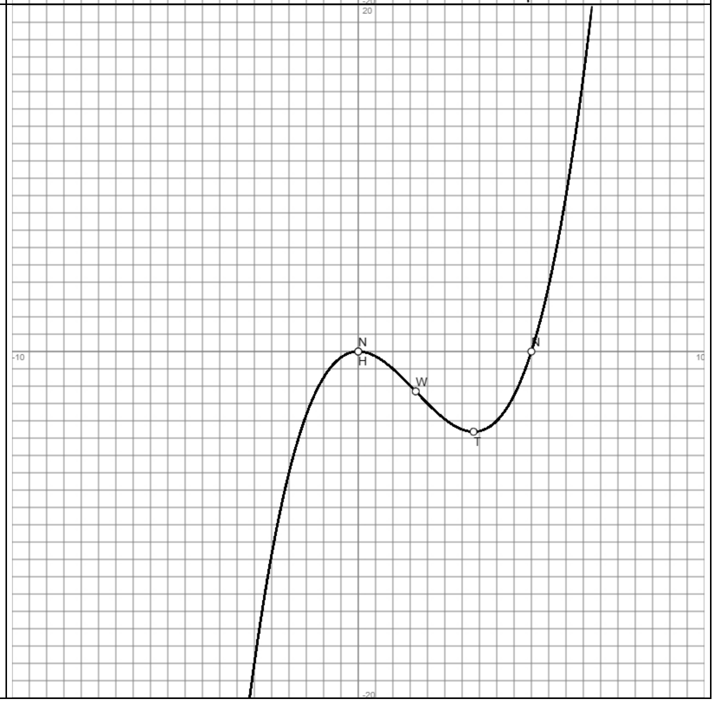
f(-x) = -f(x) oder: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ nur mit Potenzen mit ungeraden Exponenten -> f(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

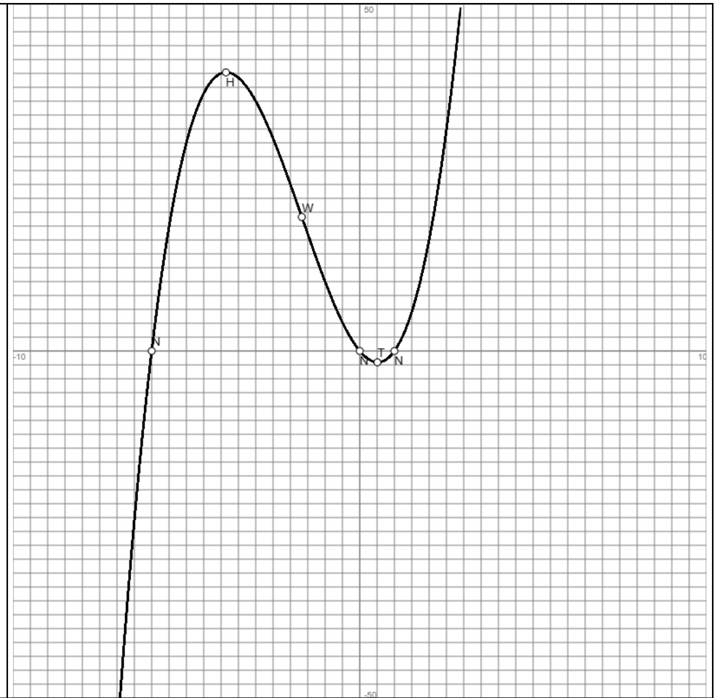
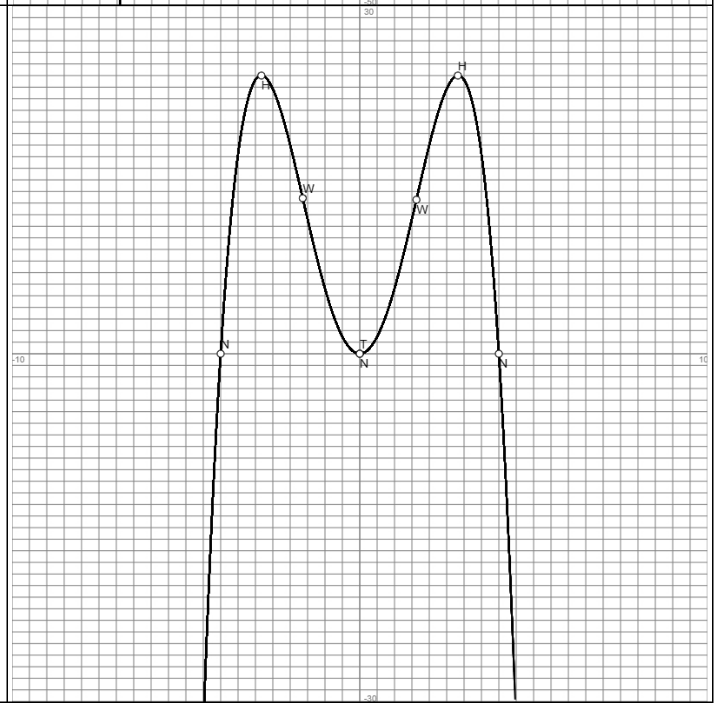
f(-x) = f(x) oder: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ nur mit Potenzen mit geraden Exponenten -> f(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems.

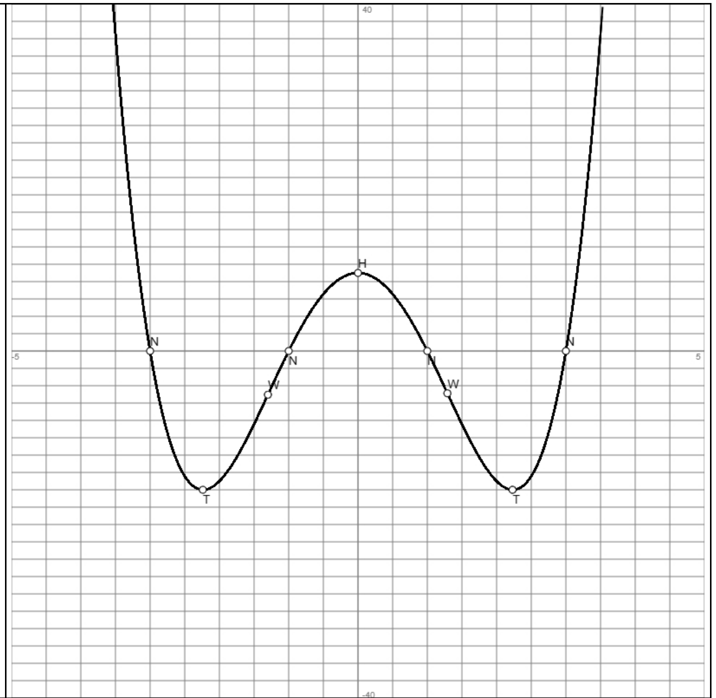
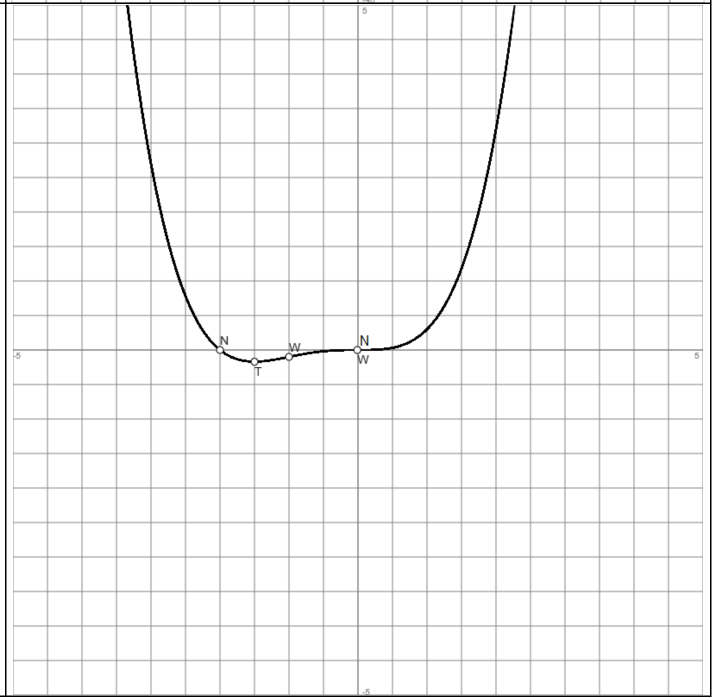
d) Es gilt hinsichtlich der Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen [lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und a-b-c-Formel, Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, Substitution $z = x^2$ u.ä.]): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$, … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel).

II. Für die Funktionen f(x) der Aufgabenstellung gilt (Aufgabe | Funktion | Verhalten für x -> ±∞ | Symmetrie | Nullstellen | Funktionsgraph):

a)	$f(x) = 0{,}5x^2+2x-6$ $f(x) = 0{,}5(x+6)(x-2)$	$a_2 = 0{,}5 > 0$, grad(f(x)) = 2 gerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse des Koordinaten-systems	$f(x) = 0$ $0{,}5x^2+2x-6 = 0$ $x^2+4x-12 = 0$ (abc-Formel) $x = -6$, $x = 2$ -> Nullstellen: N(-6|0) (1-fach) N(2|0) (1-fach)	
b)	$f(x) = -x(x+3)$ $f(x) = -x^2+3x$	$a_2 = -1 < 0$, grad(f(x)) = 2 gerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to -\infty$	keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse des Koordinaten-systems	$f(x) = 0$ $-x(x+3) = 0$ (Satz vom Nullprodukt) $-x = 0$, $x+3 = 0$ $x = 0$, $x = -3$ -> Nullstellen: N(-3|0) (1-fach) N(0|0) (1-fach)	

c)	$f(x) = -0{,}5x^3+8x$ $f(x) = -0{,}5x(x+4)(x-4)$	$a_3 = -0{,}5 < 0$, grad(f(x)) = 3 ungerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to -\infty$	$f(-x) =$ $-0{,}5\cdot(-x)^3+8\cdot(-x) =$ $0{,}5x^3-8x =$ $-(-0{,}5x^3+8x) =$ $-f(x)$ -> Symmetrie: f(x) punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems	$f(x) = 0$ $-0{,}5x^3+8x = 0$ $x^3-16x = 0$ (Ausklammern) $x(x^2-16) = 0$ (Satz vom Nullprodukt) $x = 0$, $x^2-16 = 0$ $x = 0$, $x^2 = 16$ $x = 0$, $x = \pm 4$ -> Nullstellen: N(-4|0) (1-fach) N(0|0) (1-fach) N(4|0) (1-fach)	
d)	$f(x) = 0{,}25x^2(x-5)$ $f(x) = 0{,}25x^3-1{,}25x^2$	$a_3 = 0{,}25 > 0$, grad(f(x)) = 3 ungerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse des Koordinatensystems	$f(x) = 0$ $0{,}25x^2(x-5) = 0$ (Satz vom Nullprodukt) $x^2 = 0$, $x-5 = 0$ $x = 0$, $x = 5$ -> Nullstellen: N(0|0) (2-fach) N(5|0) (1-fach)	

e)	$f(x) = x^3+5x^2-6x$ $f(x) = x(x+6)(x-1)$	$a_3 = 1 > 0$, grad(f(x)) = 3 ungerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse des Koordinaten-systems	$f(x) = 0$ $x^3+5x^2-6x = 0$ (Ausklammern) $x(x^2+5x-6) = 0$ (Satz vom Nullprodukt) $x = 0$, $x^2+5x-6 = 0$ (abc-Formel) $x = 0$, $x = 1$, $x = -6$ -> Nullstellen: N(-6|0) (1-fach) N(0|0) (1-fach) N(1|0) (1-fach)	
f)	$f(x) = -0{,}375x^4+6x^2$ $f(x) = -0{,}375x^2(x+4)(x-4)$	$a_4 = -0{,}375 < 0$, grad(f(x)) = 4 gerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to -\infty$	$f(-x) =$ $-0{,}375\cdot(-x)^4+6\cdot(-x)^2 =$ $-0{,}375x^4+6x^2 =$ $f(x)$ -> Symmetrie: f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordina-tensystems	$f(x) = 0$ $-0{,}375x^4+6x^2 = 0$ (Ausklammern) $x^2(-0{,}375x^2+6) = 0$ (Satz vom Nullprodukt) $x^2 = 0$, $-0{,}375x^2+6 = 0$ $x = 0$, $6 = 0{,}375x^2$ $x = 0$, $x^2 = 16$ $x = 0$, $x = \pm 4$ -> Nullstellen: N(-4|0) (1-fach) N(0|0) (2-fach) N(4|0) (1-fach)	

g)	$f(x) = x^4-10x^2+9$ $f(x) = (x+3)(x+1)(x-1)(x+3)$	$a_4 = 1 > 0$, grad(f(x)) = 4 gerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	$f(-x) =$ $(-x)^4-10\cdot(-x)^2 + 9 =$ $x^4-10x^2+9 =$ f(x) -> Symmetrie: f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems	$f(x) = 0$ $x^4-10x^2+9 = 0$ (Substitution: $z = x^2$) $z^2-10z+9 = 0$ (abc-Formel) $z = 1$, $z = 9$ (Rücksubstitution: $x^2 = z$) $x^2 = 1$, $x^2 = 9$ $x = \pm1$, $x = \pm3$ -> Nullstellen: N(-3|0) (1-fach) N(-1|0) (1-fach) N(1|0) (1-fach) N(3|0) (1-fach)	
h)	$f(x) = 0,1x^3(x+2)$ $f(x) = 0,1x^4+0,2x^3$	$a_4 = 0,1 > 0$, grad(f(x)) = 4 gerade -> Verhalten: $x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$ $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse des Koordinatensystems	$f(x) = 0$ $0,1x^3(x+2) = 0$ (Satz vom Nullprodukt) $x^3 = 0$, $x+2 = 0$ $x = 0$, $x = -2$ -> Nullstellen: N(-2|0) (1-fach) N(0|0) (3-fach)	

www.michael-buhlmann.de / 11.2023 / Aufgabe 1912