||Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

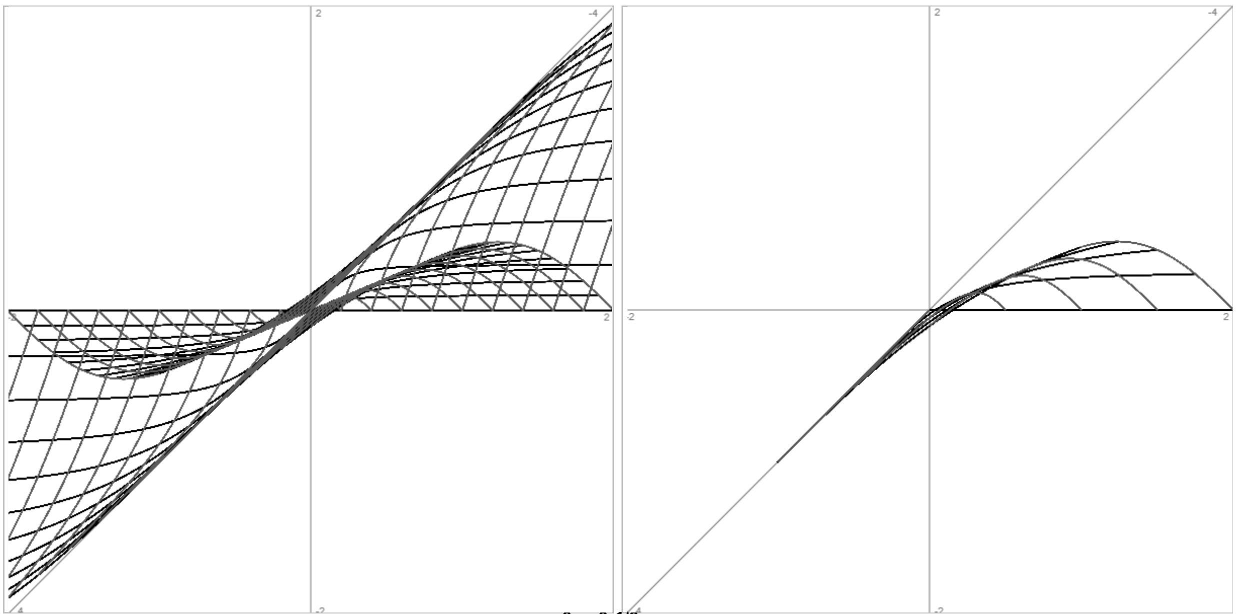
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x=0, y=0 \end{cases}.$$

a) Zeige, dass die Funktion f(x,y) auf ganz $\mathbf{R}^2$ stetig ist.

b) Bilde für (x,y) ≠ (0,0) die 1. partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$, den Gradienten grad*f* sowie das totale Differenzial d*f*.

c) Weise durch Bildung geeigneter Richtungsableitungen die (partielle) Differenzierbarkeit bzw. Nichtdifferenzierbarkeit der Funktion f(x,y) auf den Achsen des x-y-Koordinatensystems nach.

Lösung: a) I. Graphisch lässt sich die Funktion f(x,y) darstellen wie folgt (Graph):



Funktion $f(x,y) = |x|y/(x^2+y^2)^{1/2}$, x, y beliebig bzw. x, y ≥ 0

II. Die Stetigkeit der Funktion f(x,y) ergibt sich für alle (x,y) ≠ (0,0) aus der Stetigkeit der Teilfunktionen in Zähler und Nenner, so dass auch der Quotient aus Zähler- und Nennerfunktion im Definitionsbereich $D_f = \mathbf{R}\backslash\{(0,0)\}$ stetig ist.

III. Zur Betrachtung der Stetigkeit der mehrdimensionalen Funktion f(**x**) an einer Stelle $\mathbf{x_0}$ benötigen wir die Eigenschaft der Stetigkeit, die da z.B. für mehrdimensionale Abbildungen lautet:
Die Funktion f: $\mathbf{R}^n$ -> **R** ist stetig an der Stelle $\mathbf{x_0} \varepsilon \mathbf{R}^n$, falls es für jedes ε>0 ein δ>0 gibt, so dass

$$||\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x_0})| < \varepsilon$$

(||.|| euklidische Norm auf $\mathbf{R}^n$, |.| Betragsnorm auf **R**) (ε-δ-Kriterium bzw. -Definition der Stetigkeit).

IV. Als Vorbereitung für den Nachweis der Stetigkeit der Funktion f(x,y) an der Stelle (x,y) = (0,0) haben wir für reelle x, y zunächst:

$|xy| \le |x\cdot x| = x^2 \le x^2 + y^2$, falls $y \le x$
$|xy| \le |y\cdot y| = y^2 \le x^2 + y^2$, falls $x \le y$,

so dass für beide Fälle, also insgesamt für alle x, y die <u>Ungleichung</u>:

$|xy| \le x^2 + y^2$ (*)

richtig ist.

V. Zur Betrachtung der Stetigkeit der Funktion f(x,y) an der Stelle (x,y) = (0,0) sei also ε>0 als beliebig klein, aber positiv angenommen. Wir wählen δ = ε und beachten die euklidische Norm ||.|| auf $\mathbf{R}^2$ mit:

$$||(x,y)-(0,0)|| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Dann folgt:

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |f(x,y)-0)| = |f(x,y)| = \left|\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(*)}{\le} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} =$$

$||(x,y)-(0,0)|| < \delta = \varepsilon$,

womit die <u>Stetigkeit</u> der Funktion f(x,y) an der Stelle (x,y) = (0,0) bewiesen ist.

b) I. <u>Partielle Ableitungen</u> an einer Stelle $x=(x_1, x_2, \dots x_n)\varepsilon\mathbf{R}^n$ heißen bei reellem h Ableitungen einer Funktion f: $\mathbf{R}^n$ -> $\mathbf{R}$ mit:

$$f_{x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h->0}\frac{f(x_1,\dots x_i+h,\dots x_n) - f(x_1,\dots x_i,\dots x_n)}{h}$$

und damit Ableitungen nach einer Variablen x_i bei als konstant angesehenen Variablen x_j, j≠i, i, j=1,…n. Die partiellen Ableitungen werden damit nach den Ableitungsregeln der eindimensionalen Differenzialrechnung gebildet. Der Vektor der partiellen Ableitungen heißt <u>Gradient</u> grad*f* (Nabla-Operator) als:

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung sind als partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen definiert. Partiell differenzierbare Funktionen müssen dabei nicht notwendigerweise stetig sind. Dies gilt aber für total differenzierbare Funktionen, die alle auch partiell differenzierbar sind. Eine Funktion heißt total differenzierbar, wenn es eine (im Übrigen eindeutig bestimmte) Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix) A gibt, mit der bei $h=(h_1, h_2, \dots h_n)\varepsilon\mathbf{R}^n$ gilt:

$$\lim_{h->0}\frac{|f(x+h)-f(x)-Ah|}{\|h\|} = 0.$$

Im Fall der totalen Differenzierbarkeit ergibt sich das <u>totale Differenzial</u> als:

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i .$$

II. Wir leiten Funktion f(x,y) für alle (x,y) ≠ (0,0) partiell nach der Quotienten-, Ketten- und Potenzregel ab unter Beachtung, dass $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für x>0 bzw. $f(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für x<0 gilt (partielle Ableitungen):

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x > 0 \\ \dfrac{-y\sqrt{x^2+y^2} + xy \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{-y(x^2+y^2) + x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x < 0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{x(x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x > 0 \\ \dfrac{-x\sqrt{x^2+y^2} + xy \cdot \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{-x(x^2+y^2) + xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x < 0 \end{cases}$$

III. Die Funktion f(x,y) für alle x ≠ 0, y ≠ 0 als Quotient von total differenzierbaren Funktionen total differenzierbar mit dem totalen Differenzial:

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \pm\left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy\right).$$

IV. Der Gradient der Funktion f(x,y) bestimmt sich dann als:

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

c) I. Richtungsableitungen entstehen, wenn zu einer vorgegebenen Richtung $v=(v_1, v_2, \dots v_n)\varepsilon\mathbf{R}^n$ und für reelles h der Ausdruck:

$$D_v f(x) = \lim_{h->0} \frac{|f(x+h\cdot v) - f(x)|}{h}$$

existiert. Bei Richtungsableitungen können zum Nachweis von Nichtdifferenzierbarkeit auch der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert herangezogen werden, also:

$$D_{v+}f(x) = \lim_{\substack{h->0 \\ h>0}} \frac{|f(x+h\cdot v) - f(x)|}{h}, \quad D_{v-}f(x) = \lim_{\substack{h->0 \\ h>0}} \frac{|f(x-h\cdot v) - f(x)|}{h}.$$

II. Die linksseitigen und rechtsseitigen Richtungsableitungen für Punkte auf der x-Achse, x ≠ 0, errechnen sich mit Hilfe der partiellen Ableitung. Hier unterscheiden sich die links- und rechtsseitigen Grenzwerte nicht wegen:

$$D_+f(x,0) = \lim_{\substack{y->0 \\ y>0}} f_y(x,y) = \lim_{\substack{y->0 \\ y>0}} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{(x^2+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{x^3} = 1,$$

$D_-f(x,0) = \lim\limits_{\substack{y->0 \\ y<0}} f_y(x,y) = \lim\limits_{\substack{y->0 \\ y<0}} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{(x^2+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{x^3} = 1$

für x > 0 bzw.:

$D_+f(x,0) = \lim\limits_{\substack{y->0 \\ y>0}} f_y(x,y) = \lim\limits_{\substack{y->0 \\ y>0}} \frac{-x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^3}{(x^2+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^3}{x^3} = -1,$

$D_-f(x,0) = \lim\limits_{\substack{y->0 \\ y<0}} f_y(x,y) = \lim\limits_{\substack{y->0 \\ y<0}} \frac{-x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^3}{(x^2+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^3}{x^3} = -1$

für x < 0, so dass die partielle Differenzierbarkeit gewährleistet ist.

III. Die linksseitigen und rechtsseitigen Richtungsableitungen für Punkte auf der y-Achse, y ≠ 0, sind verschieden auf Grund von:

$D_+f(0,y) = \lim\limits_{\substack{x->0 \\ x>0}} f_x(x,y) = \lim\limits_{\substack{x->0 \\ x>0}} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^3}{(0+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^3}{y^3} = 1,$

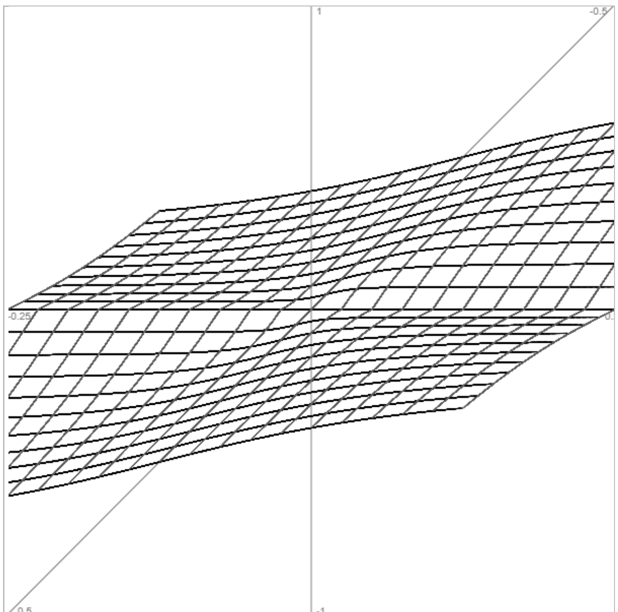
$D_-f(0,y) = \lim\limits_{\substack{x->0 \\ x<0}} f_x(x,y) = \lim\limits_{\substack{x->0 \\ x<0}} \frac{-y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y^3}{(0+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y^3}{y^3} = -1$

mit Nichtdifferenzierbarkeit der Funktion in diesen Punkten.

IV. An der Stelle (x,y) = (0,0) ist die Funktion ebenfalls nicht differenzierbar. Wir bilden dazu alle Richtungsableitungen entlang den Geraden y = mx, m reell, und haben:

h(x) = f(x,mx) = $\frac{|x|mx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \frac{m|x|x}{\sqrt{(m^2+1)x^2}} = \frac{m|x|x}{|x|\sqrt{m^2+1}} = \frac{mx}{\sqrt{m^2+1}}$ => h'(x) = $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ = h'(0),

so dass verschiedene Geradensteigungen m auch auf verschiedene Richtungsableitungen führen.



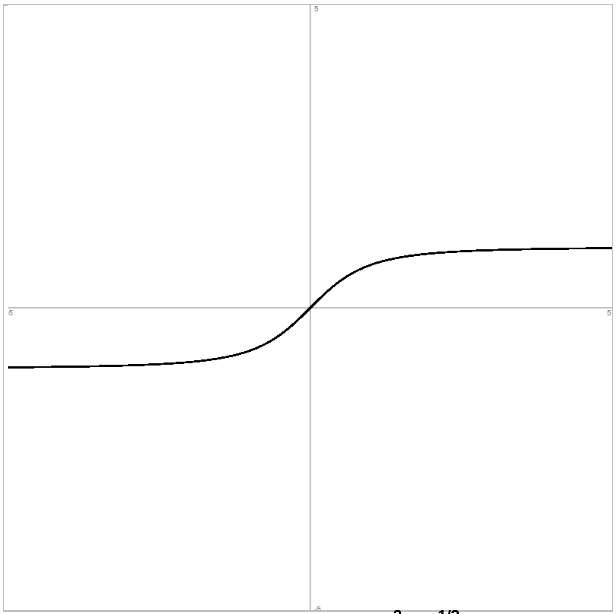
Funktion f(x,y) = |x|y/(x²+y²)^{1/2}, -0,25≤x, y≤1, -1≤z≤1

Betrachten wir noch y(m) = $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, so haben wir für m = 0 (-> y = 0 als x-Achse) y(0) = 0, so dass hier die Fortsetzung der 1. partiellen Ableitung $f_x(x,0) = 1$ unstetig ist. Betrachten wir y(m) für m -> ±∞ (-> x = 0 als y-Achse), so gilt:

$m \to -\infty \Rightarrow y(m) = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \to -1$

$m \to +\infty \Rightarrow y(m) = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \to 1.$

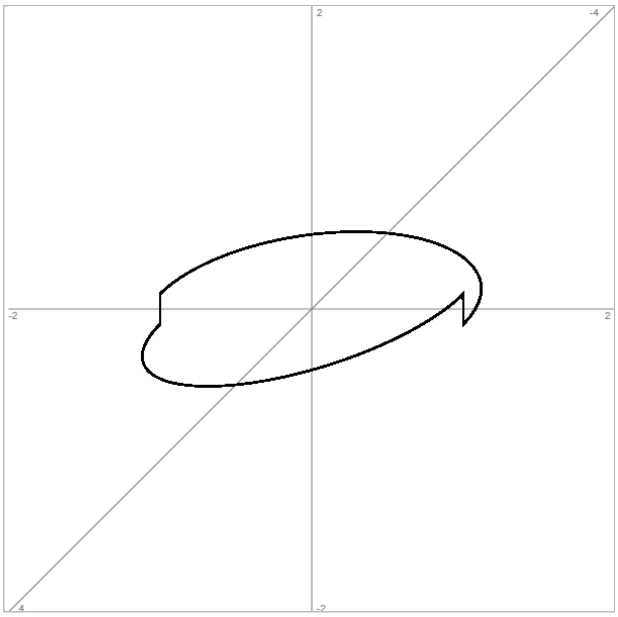
Die Funktion y(m) hat dementsprechend das Aussehen:



Funktion $y(m) = m/(m^2+1)^{1/2}$

oder übertragen auf den Einheitskreis im x-y-Koordinatensystem vermöge der Parameterfunktion

$w(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{\tan t}{\sqrt{\tan^2 t + 1}} \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$ (wegen $m = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$ am Einheitskreis):



www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1430