Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

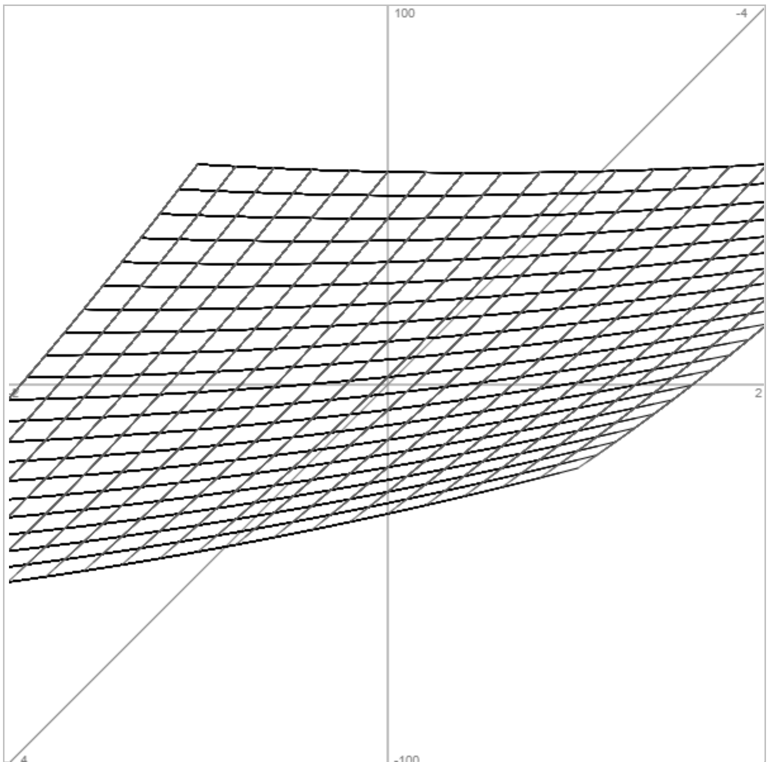
Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + (2x+5)y + y^2 + 2\,.$$

a) Bilde die 1. und 2. partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ und $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$, den Gradienten grad*f*, das totale Differenzial d*f* sowie die Hesse-Matrix.

b) Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion f(x,y) in den Punkten (0,0), (-2,1).

Lösung: a) I. Graphisch lässt sich die Funktion f(x,y) darstellen wie folgt (Graph):



Funktion $f(x,y) = x^2+(2x+5)y+y^2+2$, $-2 \leq x, y \leq 2$, $-100 \leq z \leq 100$

II. Partielle Ableitungen an einer Stelle $x=(x_1, x_2, \dots x_n) \varepsilon \mathbf{R}^n$ heißen bei reellem h Ableitungen einer Funktion f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit:

$$f_{x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1,\dots x_i + h,\dots x_n) - f(x_1,\dots x_i,\dots x_n)}{h}$$

und damit Ableitungen nach einer Variablen x_i bei als konstant angesehenen Variablen x_j, $j \neq i$, i, j=1,…n. Die partiellen Ableitungen werden damit nach den Ableitungsregeln der eindimensionalen Differenzialrechnung gebildet. Der Vektor der partiellen Ableitungen heißt Gradient grad*f* (Nabla-Operator) als:

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung sind als partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen definiert. Partiell differenzierbare Funktionen müssen dabei nicht notwendigerweise stetig sind. Dies gilt aber für total differenzierbare Funktionen, die alle auch partiell differenzierbar sind. Eine Funktion heißt total differenzierbar, wenn es eine (im Übrigen eindeutig bestimmte) Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix) A gibt, mit der bei $h=(h_1, h_2, \ldots h_n)\varepsilon\mathbf{R}^n$ gilt:

$$\lim_{h->0} \frac{|f(x+h)-f(x)-Ah|}{\|h\|} = 0.$$

Im Fall der totalen Differenzierbarkeit ergibt sich das totale Differenzial als:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \ .$$

Die 2. partiellen Ableitungen werden noch zusammengefasst in der Hesse-Matrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

III. Wir leiten Funktion f(x,y) für alle (x,y) ≠ (0,0) partiell nach der Summen-, Faktor- und Potenzregel ab (partielle Ableitungen):

$f_x(x,y) = 2x+2y$

$f_y(x,y) = 2x+2y+5$

$f_{xx}(x,y) = 2$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2$
$f_{yy}(x,y) = 2$.

III. Die Funktion f(x,y) für alle x ≠ 0, y ≠ 0 als Quotient von total differenzierbaren Funktionen total differenzierbar mit dem totalen Differenzial:

$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = (2x+2y)dx + (2x+2y+5)dy$.

IV. Der Gradient der Funktion f(x,y) bestimmt sich dann als:

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+2y+5 \end{pmatrix}.$$

V. Wir fassen die 2. partiellen Ableitungen zur Hesse-Matrix zusammen:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) I. <u>Richtungsableitungen</u> entstehen, wenn zu einer vorgegebenen Richtung $v=(v_1, v_2, \dots v_n)\varepsilon\mathbf{R}^n$ und für reelles h der Ausdruck:

$$D_v f(x) = \lim_{h->0} \frac{|f(x+h\cdot v)-f(x)|}{h}$$

existiert. Die Richtungsableitungen können im Fall ihrer Existenz über den Gradienten der Funktion berechnet werden vermöge des Skalarprodukts:

$$D_v f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

mit Vektoren v mit euklidischer Norm ||v|| = 1. Der Gradient zeigt im Übrigen die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f(x) in einem Punkt x an.

II. Im Punkt (0,0) lautet der Gradient (x=0, y=0 einsetzen):

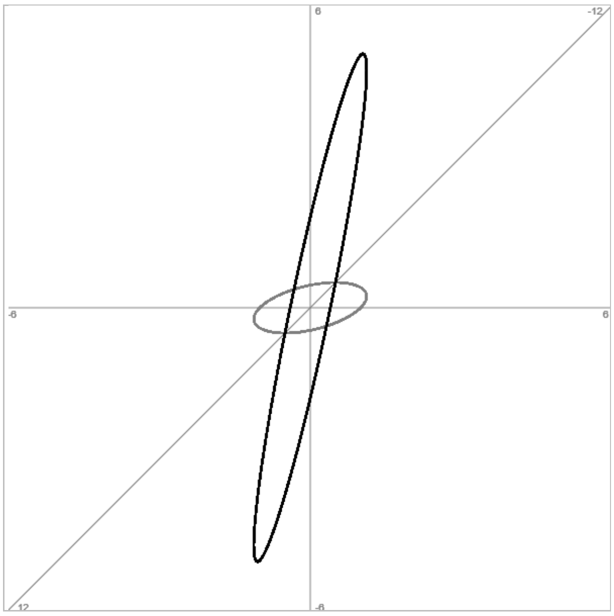
$$\text{grad}f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0+2\cdot 0 \\ 2\cdot 0+2\cdot 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Entlang der y-Achse steigt also im Punkt (0,0) die Funktion am stärksten an. Für einen Vektor $\overset{->}{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overset{->}{v}\right| = \left|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$ gilt damit die Normierung zu $\overset{->0}{v} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ als Einheitsvektor. Die Bildung des Skalarprodukts mit dem Gradienten ergibt:

$$D_v f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \cdot (0+5v_2) = \frac{5v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Z.B. in Richtung $\overset{->}{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ folgt damit: $D_{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} f(0,0) = \frac{5\cdot 4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4$ als Wert der Richtungsableitung.

Schlägt man zudem auf der x-y-Ebene um den Punkt (0,0) einen Einheitskreis, so lassen sich die Richtungsableitungen (durch den so erfolgten Übergang zu Polarkoordinaten) als Parameterfunktion $w(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$, darstellen:



III. In ähnlicher Weise gilt für den Punkt (-2,1):

grad$f$(-2,1) = $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+2\cdot 1 \\ 2\cdot(-2)+2\cdot 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ =>

$D_v f(-2,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \cdot (-2v_1+3v_2) = \frac{-2v_1+3v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.

Parametrisierung ergibt: w(t) = $\begin{pmatrix} -2+\cos t \\ 1+\sin t \\ 7-2\cos t+3\sin t \end{pmatrix}$, 0≤t≤2π, mit: