Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Bestimme das Taylorpolynom 3. Grades zum Entwicklungsmittelpunkt (x,y) = (1, 1) zur Funktion

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - xy\,.$$

Lösung: Es genügt, den Funktionsterm $f(x,y) = -\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - xy$ so umzuformen, dass wegen des Entwicklungsmittelpunktes (x,y) = (1, 1) nur noch Potenzen mit Basis (x-1), (y-1) in Erscheinung treten. Das Taylorpolynom 3. Grades ist nämlich mit der ganz rationalen Funktion f(x,y) identisch. Wir formen unter Verwendung der binomischen Formeln:

$$(y-1)^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 4x + 1$$

sowie mit:

$$(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1$$

und durch geschicktes Ausgleichen der Summanden die Funktion f(x,y) wie folgt um:

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - xy = -\frac{1}{3}(y-1)^3 - y^2 + y - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - xy =$$

$$-\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{2}x^2 - xy + y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + x - \frac{1}{2} - xy + y - \frac{1}{3} =$$

$$-\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - xy + x + y - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - (x-1)(y-1) - x - y + 1 + x + y - \frac{5}{6} =$$

$$-\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + \frac{1}{6}.$$

Das <u>Taylorpolynom</u> 3. Grades zu f(x,y) und zum Entwicklungsmittelpunkt (x,y) = (1, 1) lautet nun:

T_3(x,y) = $-\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + \frac{1}{6}$ = f(x,y).

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1454