Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = (x + 2y)^2 .$$

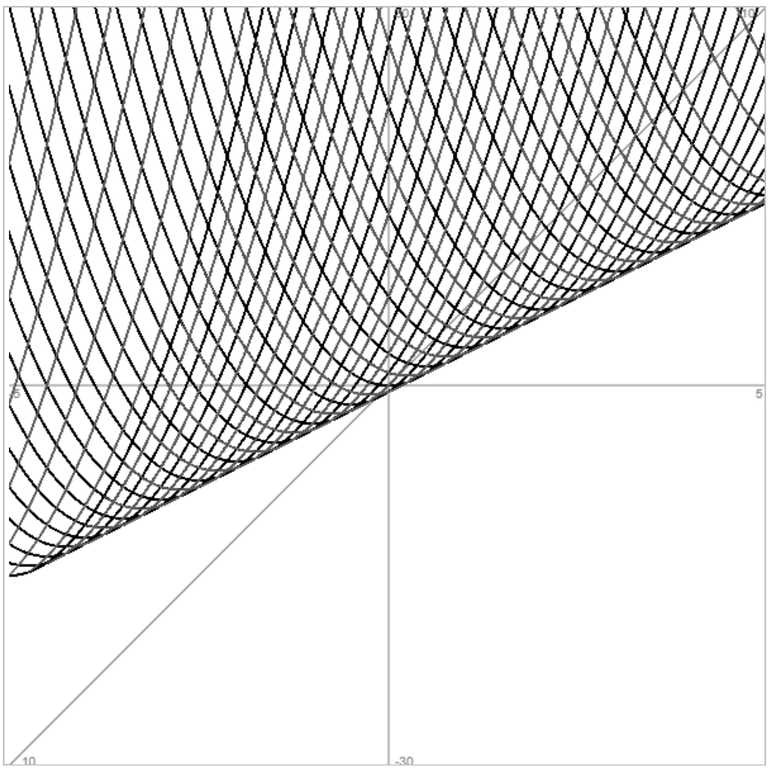
Berechne die 1. partiellen Ableitungen der Funktion und den Wert der Ableitungen im Punkt P(2|1).

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der partiellen Ableitungen differenzieren:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \; f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y. Es gelten die Ableitungsregeln wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen (Potenzregel, Regeln für trigonometrische und Exponentialfunktionen, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel). Bei den partiellen Ableitungen werden die Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als (additive, multiplikative) Konstanten behandelt.

II. Wir zeichnen zunächst den Graphen der Funktion $f(x, y) = (x + 2y)^2$:



III. Wir bilden die 1. partiellen Ableitungen der Funktion u.a. nach der Kettenregel:

$$f(x,y) = (x+2y)^2$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2(x+2y)^1 \cdot 1 = 2x+4y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(x+2y)^1 \cdot 2 = 4x+8y\,.$$

IV. Wir setzen den Punkt P(2|1) in die 1. partiellen Ableitungen ein und erhalten die Ableitungswerte:

$$f_x(2;1) = \frac{\partial f(2;1)}{\partial x} = 2\cdot 2+4\cdot 1 = 8$$

$$f_y(2;1) = \frac{\partial f(2;1)}{\partial y} = 4\cdot 2+8\cdot 1 = 16\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2298