Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = xe^{y} + ye^{-x}.$$

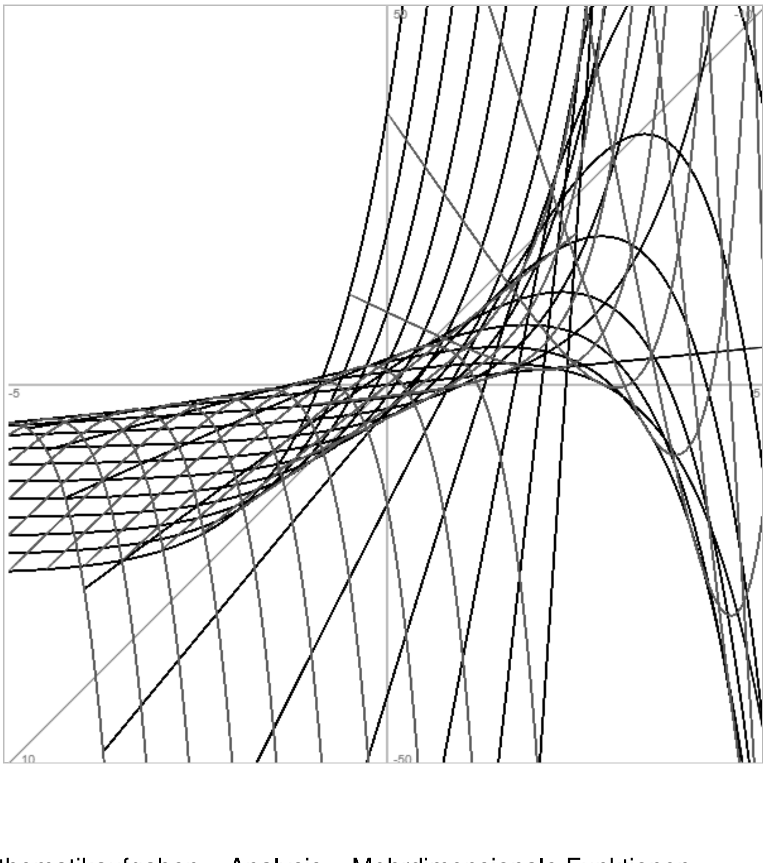
Berechne die 1. partiellen Ableitungen der Funktion und den Wert der Ableitungen in den Punkten P(0|0), Q(ln(2)|ln(3)).

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der partiellen Ableitungen differenzieren:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},\ f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y. Es gelten die Ableitungsregeln wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen (Potenzregel, Regeln für trigonometrische und Exponentialfunktionen, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel). Bei den partiellen Ableitungen werden die Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als (additive, multiplikative) Konstanten behandelt.

II. Wir zeichnen zunächst den Graphen der Funktion $f(x, y) = xe^{y} + ye^{-x}$:



III. Wir bilden die 1. partiellen Ableitungen der Funktion u.a. nach der Kettenregel:

$$f(x,y) = xe^{y} + ye^{-x}$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 \cdot e^{y} + y \cdot (-e^{-x}) = e^{y} - ye^{-x}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^{y} + 1 \cdot e^{-x} = xe^{y} + e^{-x}.$$

IV. Wir setzen den Punkt P(0|0) in die 1. partiellen Ableitungen ein und erhalten die Ableitungswerte:

$$f_x(0;0) = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = e^{0} - 0 \cdot e^{-0} = 1 - 0 = 1$$

$$f_y(0;0) = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = 0 \cdot e^{0} + e^{-0} = 0 + 1 = 1.$$

Dasselbe rechnen wir für den Punkt Q(ln(2)|ln(3)):

$$f_x(\ln 2;\ln 3) = \frac{\partial f(\ln 2;\ln 3)}{\partial x} = e^{\ln 3} - \ln 3 \cdot e^{-\ln 2} = 3 - \ln 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}\ln 3$$

$$f_y(\ln 2;\ln 3) = \frac{\partial f(\ln 2;\ln 3)}{\partial y} = \ln 2 \cdot e^{\ln 3} + e^{-\ln 2} = \ln 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} = 3\ln 2 + \frac{1}{2}.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2299