Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y).$$

Berechne die 1. partiellen Ableitungen der Funktion, das totale Differential und den Gradienten.

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der partiellen Ableitungen differenzieren:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y. Es gelten die Ableitungsregeln wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen (Potenzregel, Regeln für trigonometrische und Exponentialfunktionen, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel). Bei den partiellen Ableitungen werden die Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als (additive, multiplikative) Konstanten behandelt.

II. Das totale Differential der Funktion z = f(x,y) setzt sich aus den 1. partiellen Ableitungen zusammen:

$$df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

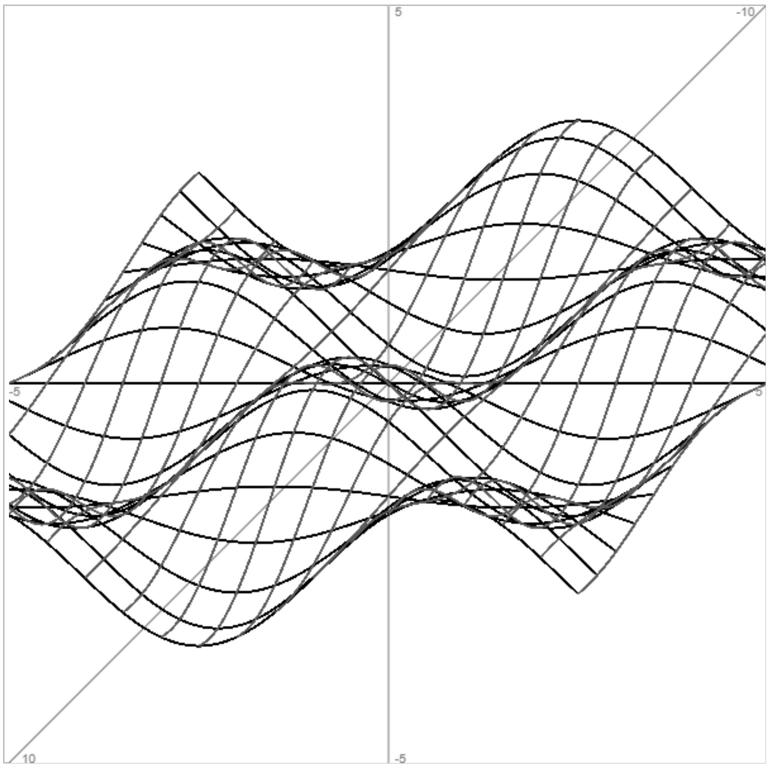
und stellt in einem Punkt P(x|y) die momentane (infinitesimal kleine) Veränderung des Funktionswerts z = f(x,y) bei momentanen Veränderungen des x- und y-Werts dar.

III. Der Gradient der Funktion z = f(x,y) ist der Vektor der 1. partiellen Ableitungen:

$$grad(f(x,y)) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und bezeichnet die Richtung der größten Veränderung des Funktionswerts z = f(x,y) in einem Punkt P(x|y).

IV. Wir zeichnen zunächst den <u>Graphen</u> der Funktion $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$:



V. Wir bilden die <u>1. partiellen Ableitungen</u> der Funktion u.a. nach der Kettenregel:

$$f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos(x)\cos(y)$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sin(x) \cdot (-\sin(y)) = -\sin(x)\sin(y).$$

VI. Das <u>totale Differential</u> der Funktion $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ lautet:

$$df(x, y) = \cos(x)\cos(y)dx - \sin(x)\sin(y)dy\ .$$

VII. Der <u>Gradient</u> der Funktion $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ bestimmt sich als:

$$grad(f(x, y)) = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2300