Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Berechne die 1. partiellen Ableitungen der Funktion, den Gradienten und die Ableitungen in Richtung $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-24\\-7\end{pmatrix}$ im Punkt P(2|-1). Bestimme den größten Wert unter allen Richtungsableitungen.

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der partiellen Ableitungen differenzieren:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y. Es gelten die Ableitungsregeln wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen (Potenzregel, Regeln für trigonometrische und Exponentialfunktionen, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel). Bei den partiellen Ableitungen werden die Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als (additive, multiplikative) Konstanten behandelt.

II. Der Gradient der Funktion z = f(x,y) ist der Vektor der 1. partiellen Ableitungen:

$$grad(f(x,y)) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

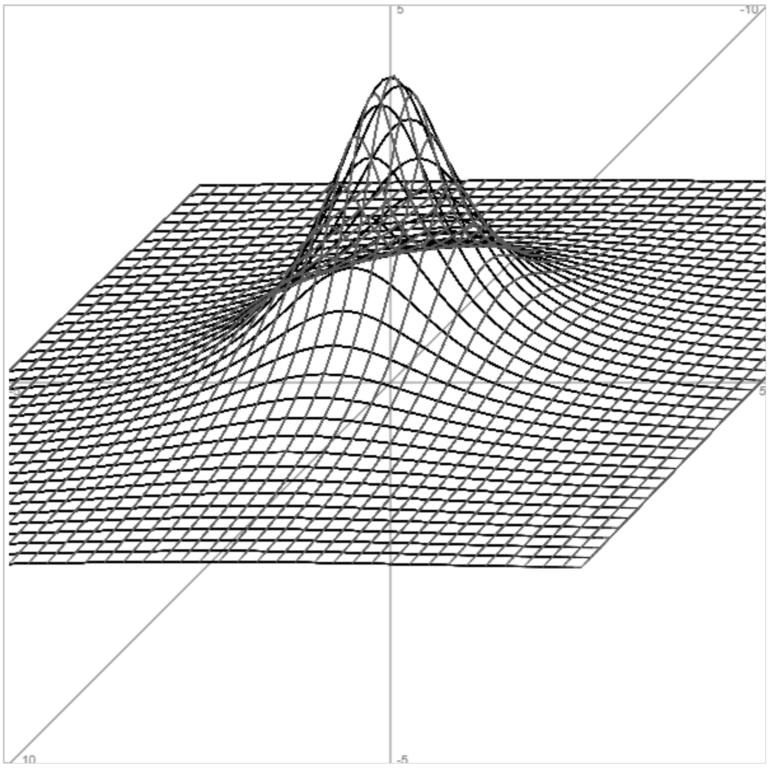
und bezeichnet die Richtung der größten Veränderung des Funktionswerts z = f(x,y) in einem Punkt P(x|y).

III. Richtungsableitungen als Ableitungen in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ auf der x-y-Ebene in einem Punkt $P(x_0|y_0)$ bestimmen sich vermöge:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}} = grad(f(x_0,y_0)) \cdot \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

und zeigen die Änderung des Funktionswerts z = f(x,y) entlang der vorgegebenen Richtung an.

IV. Wir zeichnen zunächst den Graphen der Funktion $f(x,y)=\dfrac{4}{x^2+y^2+1}$:



V. Wir bilden die 1. partiellen Ableitungen der Funktion u.a. nach der Kettenregel:

$$f(x,y)=\frac{4}{x^2+y^2+1}=4(x^2+y^2+1)^{-1}$$

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=4\cdot(-1)\cdot(x^2+y^2+1)^{-2}\cdot 2x=\frac{-8x}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=4\cdot(-1)\cdot(x^2+y^2+1)^{-2}\cdot 2y=\frac{-8y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

VI. Der Gradient der Funktion $f(x,y)=\dfrac{4}{x^2+y^2+1}$ bestimmt sich als:

$$grad(f(x,y))=\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{-8x}{(x^2+y^2+1)^2}\\ \dfrac{-8y}{(x^2+y^2+1)^2}\end{pmatrix}.$$

und beträgt im Punkt P(2|-1):

$$grad(f(2;-1))=\begin{pmatrix}\dfrac{-8\cdot 2}{(2^2+(-1)^2+1)^2}\\ \dfrac{-8\cdot(-1)}{(2^2+(-1)^2+1)^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-16}{36}\\ \dfrac{8}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{9}\\ \dfrac{2}{9}\end{pmatrix}.$$

VII. Die Richtungsableitungen der Funktion $f(x,y)=\dfrac{4}{x^2+y^2+1}$ im Punkt P(2|-1) berechnen sich dann:

Richtung $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 0 = -\frac{4}{9} = f_x(2;-1)$

Richtung $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{4}{9}\cdot 0+\frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{2}{9} = f_y(2;-1)$

Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 1\right) = -\frac{2}{9\sqrt{2}}$

Richtung $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{4}{9}\cdot 1-\frac{2}{9}\cdot 1\right) = -\frac{6}{9\sqrt{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$

Richtung $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{2}{9}\cdot 4\right) = -\frac{4}{45}$

Richtung $\begin{pmatrix}-24\\-7\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}-24\\-7\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-24\\-7\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\left(-\frac{4}{9}\cdot(-24)+\frac{2}{9}\cdot(-7)\right) = \frac{82}{225}$.

VIII. Im Punkt P(2|-1) ist in Richtung des Gradienten (als „Richtung des steilsten Anstiegs“) der Ableitungswert am größten. Wir berechnen auf Grund von $grad(f(2;-1)) = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}$:

Richtung $\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}$: $\dfrac{\partial f(2;-1)}{\partial\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{-4}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2}}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix} = \frac{9}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix} =$

$\frac{9}{\sqrt{20}}\left((-\frac{4}{9})^2+(\frac{2}{9})^2\right) = \frac{9}{\sqrt{20}}\cdot\frac{20}{81} = \frac{\sqrt{20}}{9}$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2301