Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extrempunkte

Aufgabe: Bestimme die (Art der) Extrempunkte der Funktion:

$$f(x,y) = 5 - 0{,}5x^2 + 0{,}25y^2 .$$

unter der Nebenbedingung: $y = x^2$.

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Die Zahlen x und y sind über eine Nebenbedingung φ(x,y) = 0 miteinander verbunden. Extrempunkte (Maxima, Minima) der Funktion z = f(x,y) entlang einer durch die Nebenbedingung φ(x,y) = 0 vorgegebenen Kurve lassen sich dann mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens bestimmen (wenn auch nicht als solche nachweisen):

Gegeben ist die Funktion z = f(x,y) mit der Nebenbedingung φ(x,y) = 0.

I. Bilde die Lagrangefunktion L(x,y,λ) mit dem Lagrangeschen Multiplikator λ:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\cdot\varphi(x,y)$$

II. Leite die Lagrangefunktion L(x,y,λ) partiell nach x, y und λ ab:

$$L_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda\cdot\varphi_x(x,y)$$
$$L_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda\cdot\varphi_y(x,y)$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) = \varphi(x,y)$$

III. Setze die partiellen Ableitungen gleich 0, so dass ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Variablen x, y und λ entsteht:

$$f_x(x,y) + \lambda\cdot\varphi_x(x,y) = 0$$
$$f_y(x,y) + \lambda\cdot\varphi_y(x,y) = 0$$
$$\varphi(x,y) = 0 \text{ (Nebenbedingung)}$$

IV. Löse das Gleichungssystem nach x, y und λ auf.

V. Die Lösungen x und y des Gleichungssystems sind die Koordinaten möglicher Extrempunkte der Funktion z = f(x,y) mit der Nebenbedingung φ(x,y) = 0.

II. Wir formen die Nebenbedingung um zu:

$y = x^2 \Leftrightarrow \varphi(x,y) = y - x^2 = 0$.

Dann bilden wir die Lagrangefunktion:

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 5 - 0{,}5x^2 + 0{,}25y^2 + \lambda(y-x^2)$

und leiten diese partiell nach x, y, λ ab:

$L_x(x,y,\lambda) = -x - 2\lambda x$
$L_y(x,y,\lambda) = 0{,}5y + \lambda$
$L_\lambda(x,y,\lambda) = y - x^2$.

Nullsetzen der partiellen Ableitungen führt auf das Gleichungssystem:

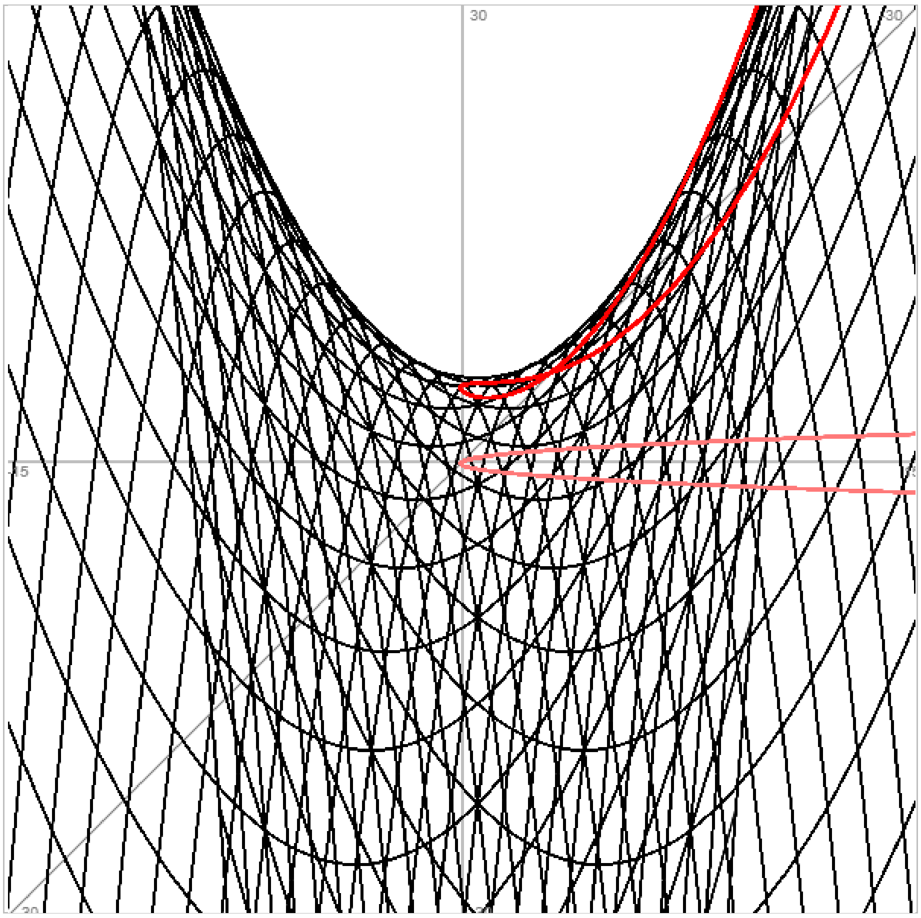
$-x - 2\lambda x = 0$
$0{,}5y + \lambda = 0$
$y - x^2 = 0$,

so dass folgt:

$-x - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow -x(1+2\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ 1+2\lambda = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \lambda = -0{,}5$
$y - x^2 = 0,\ x = 0 \Rightarrow y = 0$
$0{,}5y + \lambda = 0,\ \lambda = -0{,}5 \Rightarrow 0{,}5y - 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5y = 0{,}5 \Leftrightarrow y = 1$
$y - x^2 = 0,\ y = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Es ergeben sich damit als kritische Punkte und mögliche Extremstellen:

x = 0, y = 0 -> H(0|0) mit f(0,0) = 5,
x = -1, y = 1 -> T(-1|1) mit f(-1,1) = 4,75
x = 1, y = 1 -> T(1|1) mit f(-1,1) = 4,75.



III. Die Bezeichnungen H und T stehen für Hoch- und Tiefpunkt, (relatives) Maximum und (relatives) Minimum auf Grund von:

f(0,0) = 5 > 4,5 = f(±1,1)
x -> ±∞, y -> +∞ => f(x,y) -> +∞.

Entlang der Nebenbedingung $y = x^2$ gilt zudem die Funktionsvorschrift:

$f^*(x) = 5 - 0{,}5x^2 + 0{,}25x^4$ (Einsetzen von x^2 für y).

Die Funktion f*(x) besitzt für alle reellen x das relative Maximum H(0|5) und die relativen Minima T(±1|4,75) gemäß nebenstehender Abbildung.