Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extrempunkte

Aufgabe: Bestimme die (Art der) Extrempunkte der Funktion:

$$f(x,y,z) = 4x^2 + 3y - 7z \;.$$

unter den Nebenbedingungen: $z = 1 – x^2$, $z = 4x + y – 2$.

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Funktion dreier Veränderlicher f(x,y,z) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y, z eine reelle Zahl zu. Die Zahlen x, y, z sind über eine (oder mehrere) Nebenbedingung(en) φ(x,y,z) = 0 miteinander verbunden. Extrempunkte (Maxima, Minima) der Funktion f(x,y,z) entlang einer durch die Nebenbedingung φ(x,y,z) = 0 vorgegebenen Kurve lassen sich dann mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens bestimmen (wenn auch nicht als solche nachweisen):

Gegeben ist die Funktion f(x,y,z) mit der Nebenbedingung φ(x,y,z) = 0.

I. Bilde die Lagrangefunktion L(x,y,λ) mit dem Lagrangeschen Multiplikator λ:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi(x,y,z)$$

II. Leite die Lagrangefunktion L(x,y,λ) partiell nach x, y und λ ab:

$$L_x(x,y,z,\lambda) = f_x(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi_x(x,y,z)$$
$$L_y(x,y,z,\lambda) = f_y(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi_y(x,y,z)$$
$$L_z(x,y,z,\lambda) = f_z(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi_z(x,y,z)$$
$$L_\lambda(x,y,z,\lambda) = \varphi(x,y,z)$$

III. Setze die partiellen Ableitungen gleich 0, so dass ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Variablen x, y und λ entsteht:

$$f_x(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi_x(x,y,z) = 0$$
$$f_y(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi_y(x,y,z) = 0$$
$$f_z(x,y,z) + \lambda\cdot\varphi_z(x,y,z) = 0$$
$$\varphi(x,y,z) = 0 \text{ (Nebenbedingung)}$$

IV. Löse das Gleichungssystem nach x, y, z und λ auf.

V. Die Lösungen x, y, z des Gleichungssystems sind die Koordinaten möglicher Extrempunkte der Funktion f(x,y,z) mit der Nebenbedingung φ(x,y,z) = 0.

II. Wir formen die Nebenbedingungen um zu:

$z = 1 – x^2 \Leftrightarrow \varphi_2(x,y,z) = x^2 + z – 1 = 0$,

$z = 4x +y – 2 \Leftrightarrow \varphi_1(x,y,z) = 4x + y – z – 2 = 0$.

Dann bilden wir die Lagrangefunktion:

$L(x,y,z,\lambda_1.\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1\varphi(x,y,z) + \lambda_2\varphi_2(x,y,z) = 4x^2 + 3y – 7z + \lambda_1(x^2+z–1) + \lambda_2(4x+y–z–2)$

und leiten diese partiell nach x, y, z, λ_1, λ_2 ab:

$L_x(x,y,z,\lambda_1.\lambda_2) = 8x+2\lambda_1x+4\lambda_2$

$L_y(x,y,z,\lambda_1.\lambda_2) = 3+\lambda_2$

$L_z(x,y,z,\lambda_1.\lambda_2) = -7+\lambda_1–\lambda_2$

$L_{\lambda1}(x,y,z,\lambda_1.\lambda_2) = x^2+z–1$

$L_{\lambda2}(x,y,z,\lambda_1.\lambda_2) = 4x+y–z–2$.

Nullsetzen der partiellen Ableitungen führt auf das Gleichungssystem:

8x+2λ_1x+4λ_2 = 0
3+λ_2 = 0
-7+λ_1–λ_2 = 0
x^2+z–1 = 0
4x+y–z–2 = 0,

so dass folgt:

3+λ_2 = 0 ⇔ λ_2 = -3
-7+λ_1–λ_2 = 0, λ_2 = -3 => -7+λ_1+3 = 0 ⇔ -4+λ_1 = 0 ⇔ λ_1 = 4
8x+2λ_1x+4λ_2 = 0, λ_1 = 4, λ_2 = -3 => 8x+8x–12 = 0 ⇔ 16x–12 = 0 ⇔ 16x = 12 ⇔ x = 3/4 = 0,75
x^2+z–1 = 0 bzw. z = 1–x^2, x = 3/4 => z = 7/16 = 0,4375
4x+y–z–2 = 0, x = 3/4, z = 7/16 => 3+y–0,4375–2 = 0 ⇔ 9/16+y = 0 ⇔ y = -9/16 = -0,5625.

Es ergibt sich damit als kritischer Punkt und mögliche Extremstelle:

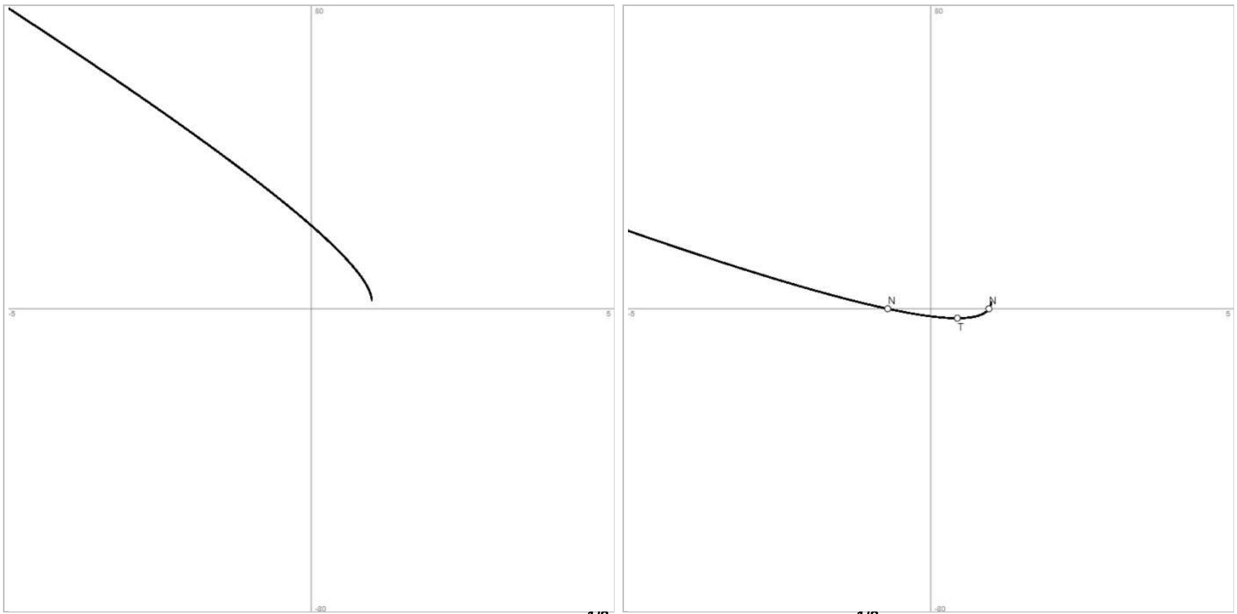
x = 0,75, y = -0,5625, z = 0,4375 -> T(0,75|-0,5625|0,4375) mit f(0,75;-0,5625;0,4375) = -2,5.

III. Der Punkt T(0,75|-0,5625|0,4375) mit f(0,75;-0,5625;0,4375) = -2,5 ist ein relatives Minimum von f(x,y,z) entlang der Nebenbedingungen. Wir bilden dazu aus f(x,y,z) die Funktion f*(z) durch Einsetzen von:

z = 1–x^2 => x^2 = 1–z => x = $\mu\sqrt{1-z}$
z = 4x+y–2 => y = z–4x+2 => y = z ± 4 $\sqrt{1-z}$ + 2.
in f(x,y,z) = 4x^2 + 3y – 7z als:

$$4x^2+3y-7z=4(1-z)+3(z\pm4\sqrt{1-z}+2)-7z=10-8z\pm12\sqrt{1-z}=f*(z)$$

für z≤1.



f*(z) = 10–8z+12(1-z)$^{1/2}$ | f*(z) = 10–8z–12(1-z)$^{1/2}$

Die (beiden Zweige der) Funktion f*(z) besitzt (besitzen) für alle reellen z≤1 gemäß den Abbildungen das relative Minimum T(0,4375|-2,5).

2. Lösung: I. Die angegebenen Nebenbedingungen:

z = 1–x^2
z = 4x+y–2

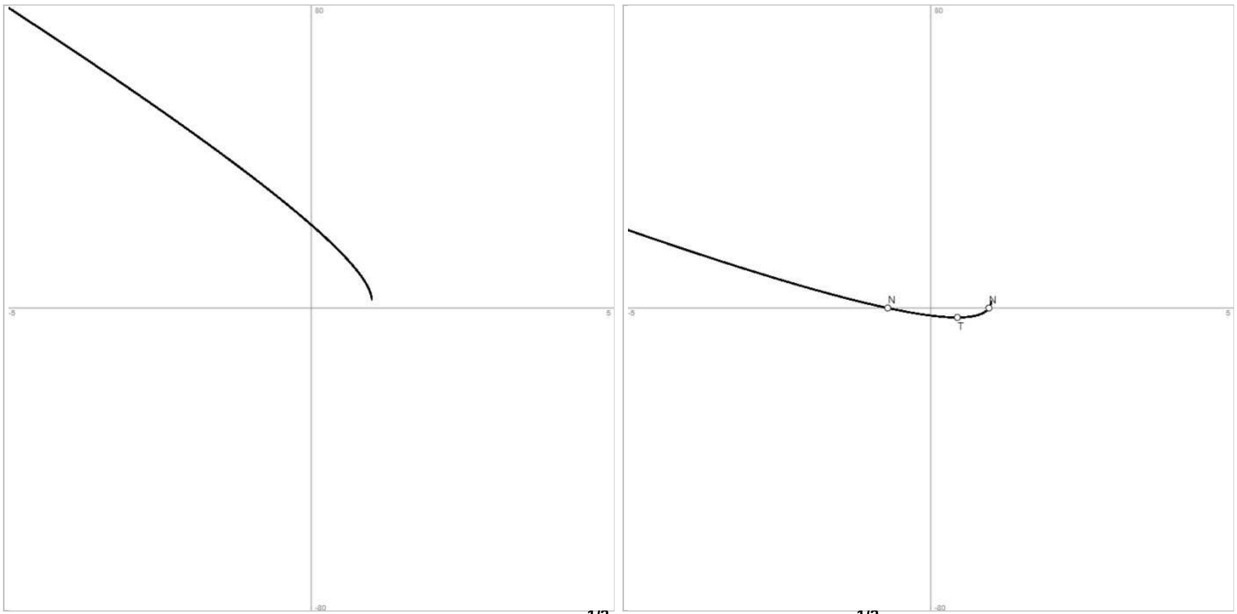
ermöglichen es vermöge:

z = 1–x^2 => x^2 = 1–z => x = $\mu\sqrt{1-z}$
z = 4x+y–2 => y = z–4x+2 => y = z ± 4 $\sqrt{1-z}$ + 2.

aus der Funktion f(x,y,z) = $4x^2 + 3y - 7z$ eine nur noch von der Variablen z abhängige Funktion f*(z) machen mit:

$$4x^2 + 3y - 7z = 4(1-z) + 3(z \pm 4\sqrt{1-z} + 2) - 7z = 10 - 8z \pm 12\sqrt{1-z} = f^*(z)$$

für z≤1.



f*(z) = 10–8z+12(1-z)$^{1/2}$ | f*(z) = 10–8z–12(1-z)$^{1/2}$

II. Die beiden Zweige der Funktion f*(z) sollen für alle reellen z≤1 auf relative Extrema untersucht werden. Dazu bilden wir die Ableitungen:

$$f^*(z) = 10 - 8z \pm 12\sqrt{1-z} \;\; => \;\; f^{*\prime}(z) = -8 \mp \frac{6}{\sqrt{1-z}}$$

und haben:

$$f^{*\prime}(z) = -8 \mp \frac{6}{\sqrt{1-z}} = 0 \Leftrightarrow \mp \frac{6}{\sqrt{1-z}} = 8 \Leftrightarrow \frac{36}{1-z} = 64 \Leftrightarrow \frac{9}{16} = 1 - z \Leftrightarrow z = \frac{7}{16}$$

für den Funktionszweig: $f^*(z) = 10 - 8z - 12\sqrt{1-z}$. Wegen:

$$f^{*\prime}(z) = -8 + \frac{6}{\sqrt{1-z}} \Rightarrow f^{*\prime\prime}(z) = \frac{3}{\sqrt{(1-z)^3}}$$

mit: f*''(7/16) = 64/9 > 0 ergibt sich auch entsprechend der rechten Abbildung mit f*(7/16) = -2,5 das relative <u>Minimum</u> T(0,4375|-2,5), das damit wegen:

z = 1–x^2 => x^2 = 1–z = 1 – 7/16 = 9/16 => x = 3/4 = 0,75
z = 4x+y–2 => y = z–4x+2 = 7/16 – 4·0,75 + 2 = 7/16 – 1 = -9/16 = -0,5625

relatives Minimum T(0,75|-0,5625|0,4375) von f(x,y,z) mit f(0,75;-0,5625;0,4375) = -2,5 bzgl. der Nebenbedingungen: z = 1 – x^2, z = 4x + y – 2 ist.

www.michael-buhlmann.de / 12.2021 / Aufgabe 1544