Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: a) Eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) 3. Grades geht durch den Ursprung des Koordinatensystems, hat an der Nullstelle x=2 einen Tiefpunkt und läuft durch den Punkt P(4|8). Stelle die Gleichung der Funktion auf.

Gegeben sei im Folgenden die Funktionenschar

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x(x-t)^2$$

mit Parameter t > 0.

b) Es sei t=6. Skizziere die Funktion $f_6(x)$ im Koordinatensystem und zeige, dass diese Funktion monoton steigend ist für $x \geq 6$.
c) Es sei t=4. Bestimme das Intervall, in dem die Funktion $f_4(x)$ rechts gekrümmt ist.
d) Es sei t=10. Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f_{10}(x)$ und der x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems.
e) Es sei t=5. Gegeben sei die Gerade x = u, u>0. Wie muss u gewählt werden, damit die Gerade die Fläche zwischen der Funktion $f_5(x)$ und der x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems im Verhältnis 1:3 teilt?
f) Für welches t>0 ist der Flächeninhalt zwischen Funktion $f_t(x)$ und x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems 16/3 FE groß.
g) Es sei t=2. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, den die Wendetangente an die Funktion $f_2(x)$ mit den Achsen des Koordinatensystems bildet?
h) Es sei t=8. In die Fläche zwischen der Funktion $f_8(x)$ und der x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems soll ein rechtwinkliges Dreieck größten Flächeninhalts so einbeschrieben werden, dass eine Ecke des Dreiecks im Ursprung O des Koordinatensystems, die zweite Ecke P auf der positiven x-Achse, die dritte Ecke Q auf der Funktion $f_8(x)$ liegt. Wie heißen die Ecken des Dreiecks, wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

1. Lösung: a) Bestimmungsaufgabe: Es gilt laut Aufgabenstellung (ganz rationale Funktion 3. Grades, Tiefpunkt) der Ansatz:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

mit zu bestimmenden reellen Zahlen a, b, c, d. Wir benötigen vier Eigenschaften der Funktion f(x) und erhalten damit ein lineares Gleichungssystem. Zunächst zu den Eigenschaften:

Ursprung O(0|0): $f(0) = a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d = 0$
Nullstelle, Tiefpunkt T(2|0): $f(2) = a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d = 0$, $f'(2) = f(0) = 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c = 0$
Punkt P(4|8): $f(4) = a\cdot 4^3+b\cdot 4^2+c\cdot 4+d = 8$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem und dessen Lösung etwa – wie nachstehend – mit dem Gauß-Algorithmus:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & & & & & & + & 1d & = & 0 \\ + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & 0 \\ + & 12a & + & 4b & + & 1c & & & = & 0 \\ + & 64a & + & 16b & + & 4c & + & 1d & = & 8 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 8 \end{array}$$

1. Schritt: 2*(*3*) - 3*(*1*) / 1*(*4*) - 8*(*1*) /

8	4	2	1	|	0
0	0	0	1	|	0
0	-4	-4	-3	|	0
0	-16	-12	-7	|	8

2. Schritt: -1*(*4*) + 4*(*2*) /

8	4	2	1	|	0
0	-4	-4	-3	|	0
0	0	0	1	|	0
0	0	-4	-5	|	-8

3. Schritt: (keine Umformung) /

8	4	2	1	|	0
0	-4	-4	-3	|	0
0	0	-4	-5	|	-8
0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrr}
+8a & +4b & +2c & +1d & = 0 \\
 & -4b & -4c & -3d & = 0 \\
 & & -4c & -5d & = -8 \\
 & & & +1d & = 0
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

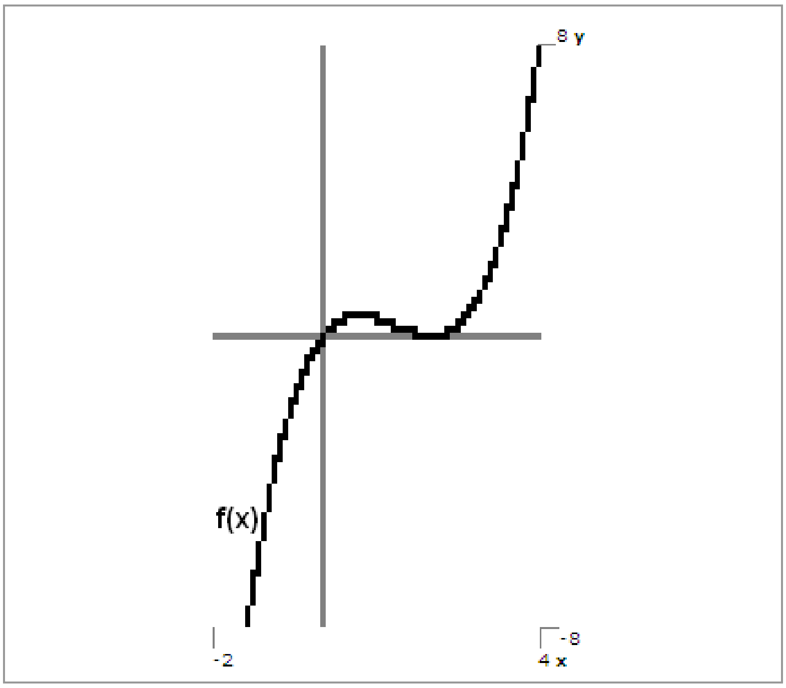
d= 0
c = 2
b = -2
a = 0.5

Die gesuchte Funktion lautet damit: $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 2x$.

Wertetabelle:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	2	-4	3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.67	0.5926	0	-1.99	3	Hochpunkt H(0.67|0.59)
1.34	0.2919	-0.6666	0	3	Wendepunkt W(1.34|0.29)
2	0	0	2	3	Nullstelle N(2|0) = Tiefpunkt T(2|0)

Graph:



b) Für t=6 ist: $f_6(x)=\frac{1}{6}x(x-6)^2=\frac{1}{6}x(x^2-12x+36)=\frac{1}{6}x^3-2x^2+6x$. Wir berechnen die ersten zwei Ableitungen als:

$$f_6(x)=\frac{1}{6}x^3-2x^2+6x \Rightarrow f_6'(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+6 \Rightarrow f_6''(x)=x-4$$

und erhalten mit:

$$f_6'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=6$$

die Stellen der Funktion mit waagerechter Tangente. Wegen $f_6''(2) = -2 < 0$ liegt bei x=2 ein Hochpunkt, wegen $f_6''(6) = 2 > 0$ bei x=6 ein Tiefpunkt vor. Monotonieintervalle der Funktion sind dann:

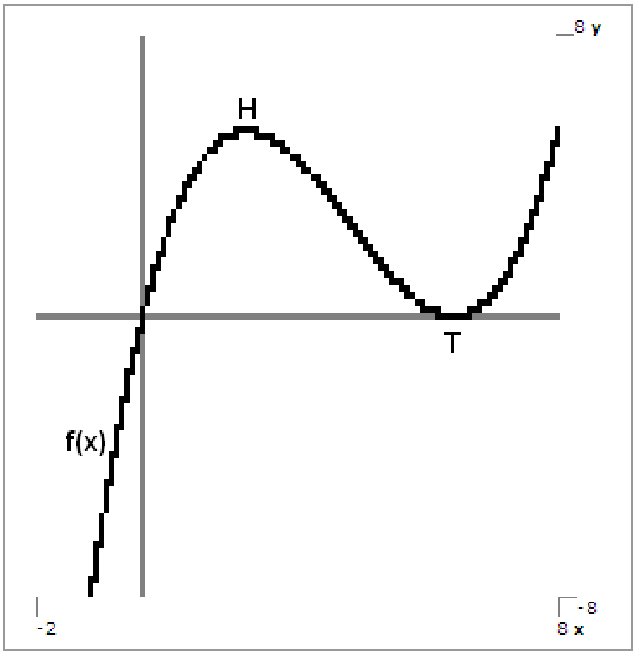
(-∞; 2): $f_6(x)$ monoton steigend (x=2 Hochpunkt)
(2; 6): $f_6(x)$ monoton fallend (x=2 Hochpunkt, x=6 Tiefpunkt)
(6; ∞): $f_6(x)$ monoton steigend (x=6 Tiefpunkt).

Damit ist $f_6(x)$ in der Tat monoton steigend für x≥6.

Wertetabelle ($f(x) = f_6(x)$):

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	6	-4	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
2	5.3333	0	-2	Hochpunkt H(2|5.33)
4	2.6867	-2	0	Wendepunkt W(4|2.69)
6	0	0	2	Tiefpunkt T(6|0)

Graph:



c) Für t=4 lautet die Funktion: $f_4(x)=\frac{1}{4}x(x-4)^2=\frac{1}{4}x(x^2-8x+16)=\frac{1}{4}x^3-2x^2+4x$. Der Wendepunkt der Funktion $f_4(x)$ ergibt sich aus:

$$f_4(x)=\frac{1}{4}x^3-2x^2+4x \Rightarrow f_4'(x)=\frac{3}{4}x^2-4x+4 \Rightarrow f_4''(x)=\frac{3}{2}x-4 \Rightarrow f_4'''(x)=\frac{3}{2}$$

und:

$$f_4''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-4=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x=4 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$

sowie:

$f_4'''(\frac{8}{3}) = \frac{3}{2} > 0$

als: W($\frac{8}{3}$|$\frac{32}{27}$) (mit f_4($\frac{8}{3}$) = $\frac{32}{27}$). Es existieren somit die beiden Krümmungsintervalle:

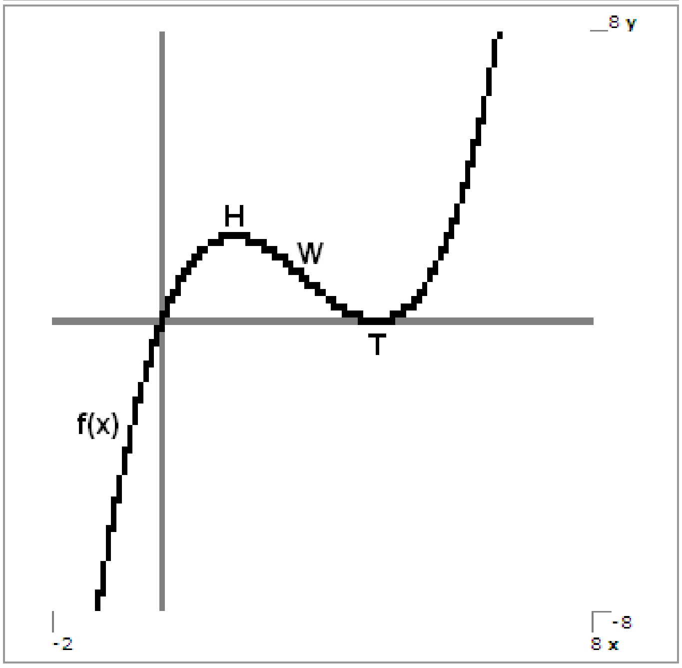
(-∞;$\frac{8}{3}$): f_4(x) rechts gekrümmt

($\frac{8}{3}$; ∞): f_4(x) links gekrümmt,

da am Wendepunkt wegen $f_4'''(\frac{8}{3}) = \frac{3}{2} > 0$ die Funktion von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht.

Wertetabelle (f(x) = f_4(x)):				
X	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	4	-4	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1.33	2.3704	0	-2	Hochpunkt H(1.33|2.37)
2.67	1.1941	-1.33	0	Wendepunkt W(2.67|1.19)
4	0	0	2	Tiefpunkt T(4|0)

Graph:



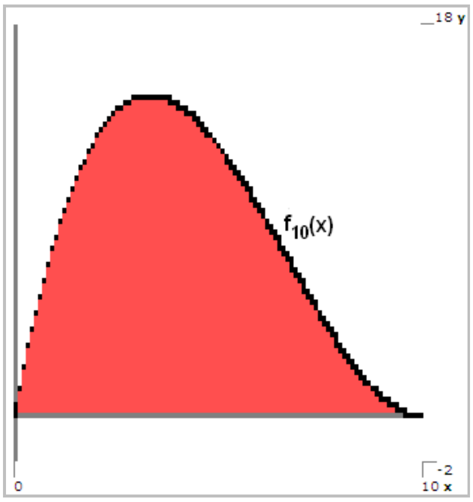
d) Es sei t=10. Für die Funktion f_{10}(x) aus der Funktionenschar gilt die Funktionsgleichung: $f_{10}(x) = \frac{1}{10}x(x-10)^2 = \frac{1}{10}x(x^2-20x+100) = \frac{1}{10}x^3 - 2x^2 + 10x$. Zur Berechnung der Fläche zwischen Funktion und x-Achse ermitteln wir zunächst die Nullstellen von f_{10}(x), also:

$$f_{10}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x(x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10.$$

Die <u>Fläche</u> errechnet sich dann zwischen den Grenzen x=0 und x=10 mit Hilfe der Stammfunktion $F_{10}(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2$ als:

$$A = \int_0^{10} f_{10}(x)dx = \int_0^{10}\left(\frac{1}{10}x^3 - 2x^2 + 10x\right)dx = \left[\frac{1}{40}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2\right]_0^{10} = 83\frac{1}{3}$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt damit: A = $83\frac{1}{3}$ FE.



e) Es sei t=5. Die Funktion $f_5(x)$ aus der Funktionenschar sowie eine zugehörige Stammfunktion $F_5(x)$ lauten:

$$f_5(x) = \frac{1}{5}x(x-5)^2 = \frac{1}{5}x(x^2 - 10x + 25) = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 5x$$

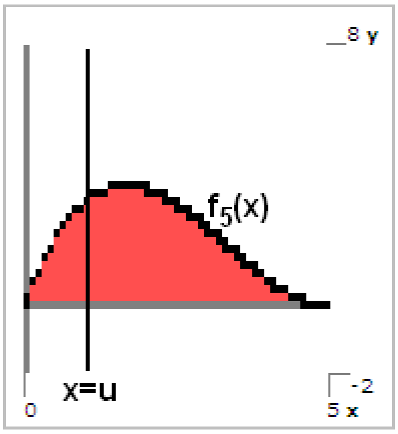
$$F_5(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2.$$

Weiter hat die Funktion $f_5(x)$ die Nullstellen x=0 und x=5 vermöge:

$$f_5(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x(x-5)^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5.$$

Die zunächst zu berechnende gesamte Fläche zwischen Funktion und x-Achse hat damit den Wert:

$$A = \int_0^5 f_5(x)dx = \int_0^5 \left(\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 5x\right)dx = \left[\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = 10{,}4167$$



Die Fläche A = 10,4167 FE soll nun durch eine senkrechte Gerade x = u, u>0, im Verhältnis 1:3 geteilt werden, d.h. – bei 1+3 = 4 Teilen insgesamt – gilt z.B. für die linke Teilfläche A_1:

A_1 = A/4

$$A_1 = \int_0^u f_5(x)dx = \int_0^u \left(\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 5x\right)dx = \left[\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^u = \frac{1}{20}u^4 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{5}{2}u^2.$$

Zu lösen ist damit die Gleichung:

$$A_1 = \frac{1}{20}u^4 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{5}{2}u^2 = \frac{A}{4} = 2{,}6042.$$

Wir erhalten unter Beachtung von u>0 als Lösung: u = 1,22. Die Gerade x = 1,22 teilt also die gesamte Fläche in der gewünschten Art auf.

f) Wir betrachten allgemein eine beliebige Funktion $f_t(x) = \frac{1}{t}x(x-t)^2$ der Funktionenschar und berechnen deren Nullstellen mit:

$$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t}x(x-t)^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-t)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - t = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = t\,.$$

Der zunächst zu suchende allgemeine <u>Flächeninhalt</u> A errechnet sich mit Hilfe einer Stammfunktion $F_t(x)$ von $f_t(x) = \frac{1}{t}x(x-t)^2 = \frac{1}{t}x(x^2 - 2tx + t^2) = \frac{1}{t}x^3 - 2x + tx$ als:

$$A = \int_0^t f_t(x)dx = \int_0^t \left(\frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx\right)dx = \left[\frac{1}{4t}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\right]_0^t = \frac{1}{4t}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t}{2}t^2 - 0 =$$
$$\frac{t^3}{4} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$$

Es soll gelten: A = 16/3 FE, so dass die nachstehende Gleichung greift:

$$\frac{t^3}{12} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow t^3 = 64 \Leftrightarrow t = 4\,.$$

Das gesuchte t lautet also: t=4, die zugehörige Funktion heißt: $f_4(x) = \frac{1}{4}x(x-4)^2$.

g) Es sei t=2. Für die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^2 = \frac{1}{2}x(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x$ bilden wir die Ableitungen:

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \;\Rightarrow\; f_2'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2 \;\Rightarrow\; f_2''(x) = 3x - 4 \;\Rightarrow\; f_2'''(x) = 3\,,$$

so dass sich der <u>Wendepunkt</u> errechnet mit:

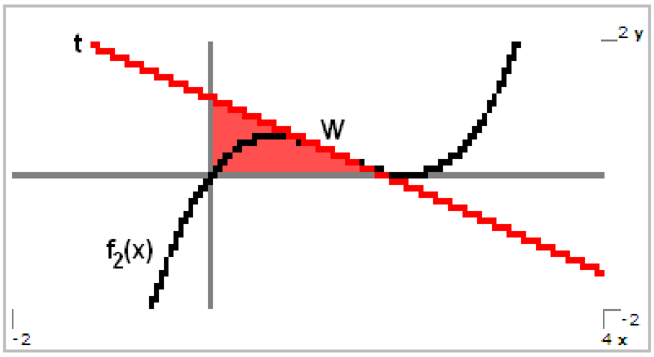
$$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\,,$$

weiter mit: $f_2'''(\frac{4}{3}) = 3 \neq 0$ und $f_2(\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}(\frac{4}{3} - 2)^2 = \frac{8}{27}$ als: W($\frac{4}{3}$|$\frac{8}{27}$). Die <u>Wendetangente</u> besitzt dann auf Grund von:

t: $y = f_2'(\frac{4}{3})(x - \frac{4}{3}) + f_2(\frac{4}{3})$

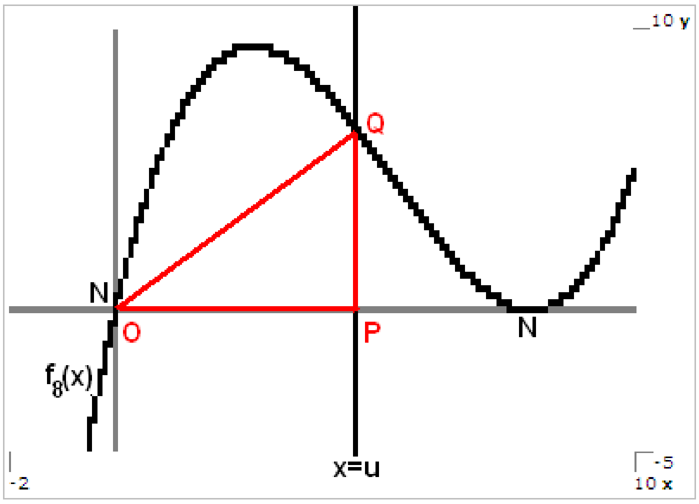
den Funktionsterm:

t: $y = -\frac{2}{3}x + 1{,}1852$.



y-Achsenabschnittspunkt und Nullstelle der Tangente sind: $S_t(0|1{,}19)$ (x=0), $N_t(1{,}78|0)$ (y=0), so dass das von Tangente, x- und y-Achse begrenzte Dreieck die Grundseite g = 1,78 und die Höhe h = 1,19 besitzt. Die Dreiecksfläche bestimmt sich damit als: A = gh/2 = 1,06 FE.

h) Es sei t=8. Die Funktion $f_8(x) = \frac{1}{8}x(x-8)^2$ hat die Nullstellen N(0|0) und N(8|0), wir bilden daher, um das flächenmaximale rechtwinklige Dreieck zu berechnen, die Senkrechte x = u mit 0≤u≤8. Die Senkrechte schneidet die x-Achse im Punkt P(u|0), die Funktion $f_8(x)$ im Punkt Q(u|f_8(u)). Mit O(0|0) ergibt sich damit das rechtwinklige Dreieck OPQ.



Dieses Dreieck hat gemäß A = gh/2 (g als Grundseite, h als Höhe) und mit g = u und h = f(u) die Flächeninhaltsfunktion: A(u) = u·f(u)/2, d.h.:

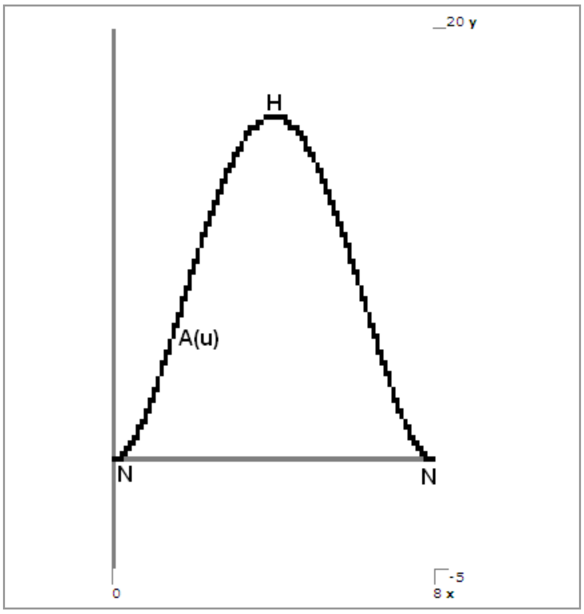
$$A(u) = \frac{1}{16}u^2(u-8)^2.$$

Wir bestimmen das globale Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) im Intervall [0; 8] und haben als relativen Hochpunkt mit u=4 und A(4)=16: H(4|16).

Wertetabelle:

u	y = A(u)	A'(u)	A''(u)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	8	Schnittpunkt S_y(0|0)
1.69	7.1074	6.16	0	Wendepunkt W(1.69|7.11)
4	16	0	-4	Hochpunkt H(4|16)
6.3	7.169	-6.16	0	Wendepunkt W(6.3|7.17)
8	0.0004	0	8	Tiefpunkt T(8|0)

Graph:



Der relative Hochpunkt ist das globale Maximum wegen A(0) = 0 und A(8) = 0 (Randstellen des Intervalls [0; 8]). Die Ecken des zum Parameter u=4 gehörenden Dreiecks heißen: O(0|0), P(4|0), Q(4|8), die maximale Fläche ist – siehe den Hochpunkt der Flächeninhaltsfunktion – 16 FE groß.

2. Lösung: a) a) Bestimmungsaufgabe: Es gilt laut Aufgabenstellung (ganz rationale Funktion 3. Grades, Nullstellen, Tiefpunkt als Nullstelle) der Ansatz der Funktion f(x) in der Produktdarstellung gemäß der Existenz einer einfachen Nullstelle im Ursprung O(0|0) und einer doppelten im Tiefpunkt T(2|0):

$$f(x) = ax(x-2)^2 .$$

Es ist damit nur noch die Unbekannte a zu bestimmen. Da der Punkt P(4|8) auf der Funktion liegt, folgt aus der Punktprobe mit P zudem:

$$8 = a \cdot 4(4-2)^2 \Leftrightarrow 8 = 16a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} .$$

Die gesuchte Funktion lautet damit:

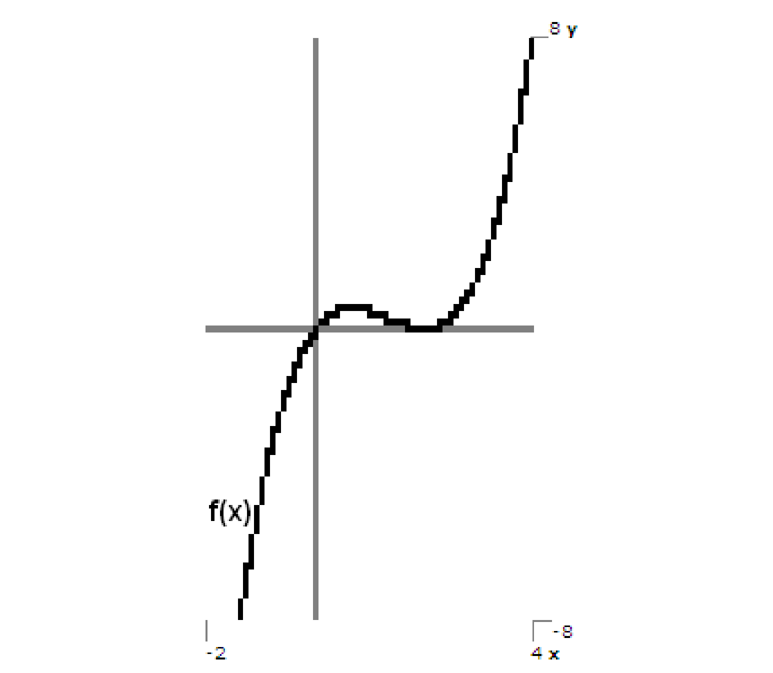
$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^2$$

(und ist identisch mit der Funktion $f_2(x)$ der Funktionenschar der Aufgabe).

Wertetabelle:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	2	-4	3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.67	0.5926	0	-1.99	3	Hochpunkt H(0.67|0.59)
1.34	0.2919	-0.6666	0	3	Wendepunkt W(1.34|0.29)
2	0	0	2	3	Nullstelle N(2|0) = Tiefpunkt T(2|0)

Graph:



b) Für t=6 ist: $f_6(x) = \frac{1}{6}x(x-6)^2 = \frac{1}{6}x(x^2 - 12x + 36) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$. Wir berechnen die ersten zwei Ableitungen als:

$$f_6(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x \Rightarrow f_6'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f_6''(x) = x - 4$$

und erhalten mit:

$$f_6'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

die Stellen der Funktion mit waagerechter Tangente. Wegen f_6“(2) = -2 < 0 liegt bei x=2 ein Hochpunkt, wegen f_6“(6) = 2 > 0 bei x=6 ein Tiefpunkt vor. Monotonieintervalle der Funktion sind dann:

(-∞; 2): $f_6(x)$ monoton steigend (x=2 Hochpunkt)
(2; 6): $f_6(x)$ monoton fallend (x=2 Hochpunkt, x=6 Tiefpunkt)
(6; ∞): $f_6(x)$ monoton steigend (x=6 Tiefpunkt).

Damit ist $f_6(x)$ in der Tat monoton steigend für x≥6.

c) Für t=4 lautet die Funktion: $f_4(x) = \frac{1}{4}x(x-4)^2 = \frac{1}{4}x(x^2 - 8x + 16) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x$. Der Wendepunkt der Funktion $f_4(x)$ ergibt sich aus:

$$f_4(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x \;\Rightarrow\; f_4'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4x + 4 \;\Rightarrow\; f_4''(x) = \frac{3}{2}x - 4 \;\Rightarrow\; f_4'''(x) = \frac{3}{2}$$

und:

$$f_4''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

sowie:

$$f_4'''(\frac{8}{3}) = \frac{3}{2} > 0$$

als: W($\frac{8}{3}$|$\frac{32}{27}$) (mit $f_4(\frac{8}{3}) = \frac{32}{27}$). Es existieren somit die beiden Krümmungsintervalle:

(-∞;$\frac{8}{3}$): $f_4(x)$ rechts gekrümmt

($\frac{8}{3}$; ∞): $f_4(x)$ links gekrümmt,

da am Wendepunkt wegen $f_4'''(\frac{8}{3}) = \frac{3}{2} > 0$ die Funktion von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht.

d) Es sei t=10. Für die Funktion $f_{10}(x)$ aus der Funktionenschar gilt die Funktionsgleichung:
$f_{10}(x) = \frac{1}{10}x(x-10)^2 = \frac{1}{10}x(x^2 - 20x + 100) = \frac{1}{10}x^3 - 2x^2 + 10x$. Zur Berechnung der Fläche zwischen Funktion und x-Achse ermitteln wir zunächst die Nullstellen von $f_{10}(x)$, also:

$$f_{10}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x(x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10.$$

Die Fläche errechnet sich dann zwischen den Grenzen x=0 und x=10 mit Hilfe der Stammfunktion $F_{10}(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2$ als:

$$A = \int_0^{10} f_{10}(x)dx = \int_0^{10}\left(\frac{1}{10}x^3 - 2x^2 + 10x\right)dx = \left[\frac{1}{40}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2\right]_0^{10} = 83\frac{1}{3}$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt damit: A = $83\frac{1}{3}$ FE.

e) Es sei t=5. Die Funktion $f_5(x)$ aus der Funktionenschar sowie eine zugehörige Stammfunktion $F_5(x)$ lauten:

$$f_5(x) = \frac{1}{5}x(x-5)^2 = \frac{1}{5}x(x^2 - 10x + 25) = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 5x$$

$F_5(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$.

Weiter hat die Funktion $f_5(x)$ die Nullstellen x=0 und x=5 vermöge:

$$f_5(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x(x-5)^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5.$$

Die zunächst zu berechnende gesamte Fläche zwischen Funktion und x-Achse hat damit den Wert:

$$A = \int_0^5 f_5(x)dx = \int_0^5 \left(\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 5x\right)dx = \left[\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = 10{,}4167$$

Die Fläche A = 10,4167 FE soll nun durch eine senkrechte Gerade x = u, u>0, im Verhältnis 1:3 geteilt werden, d.h. – bei 1+3 = 4 Teilen insgesamt – gilt z.B. für die linke Teilfläche A_1:

$A_1 = A/4$

$$A_1 = \int_0^u f_5(x)dx = \int_0^u \left(\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 5x\right)dx = \left[\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^u = \frac{1}{20}u^4 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{5}{2}u^2.$$

Zu lösen ist damit die Gleichung:

$$A_1 = \frac{1}{20}u^4 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{5}{2}u^2 = \frac{A}{4} = 2{,}6042.$$

Wir erhalten unter Beachtung von u>0 als Lösung: u = 1,22. Die Gerade x = 1,22 teilt also die gesamte Fläche in der gewünschten Art auf.

f) Wir betrachten allgemein eine beliebige Funktion $f_t(x) = \frac{1}{t}x(x-t)^2$ der Funktionenschar und berechnen deren Nullstellen mit:

$$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t}x(x-t)^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-t)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-t = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = t.$$

Der zunächst zu suchende allgemeine Flächeninhalt A errechnet sich mit Hilfe einer Stammfunktion $F_t(x)$ von $f_t(x) = \frac{1}{t}x(x-t)^2 = \frac{1}{t}x(x^2 - 2tx + t^2) = \frac{1}{t}x^3 - 2x + tx$ als:

$$A = \int_0^t f_t(x)dx = \int_0^t \left(\frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx\right)dx = \left[\frac{1}{4t}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\right]_0^t = \frac{1}{4t}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t}{2}t^2 - 0 =$$

$$\frac{t^3}{4} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$$

Es soll gelten: A = 16/3 FE, so dass die nachstehende Gleichung greift:

$$\frac{t^3}{12} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow t^3 = 64 \Leftrightarrow t = 4.$$

Das gesuchte t lautet also: t=4, die zugehörige Funktion heißt: $f_4(x) = \frac{1}{4}x(x-4)^2$.

g) Es sei t=2. Für die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^2 = \frac{1}{2}x(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x$ bilden wir die Ableitungen:

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \Rightarrow f_2'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f_2''(x) = 3x - 4 \Rightarrow f_2'''(x) = 3,$$

so dass sich der Wendepunkt errechnet mit:

$f_2'''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$,

weiter mit: $f_2''''(\frac{4}{3}) = 3 \neq 0$ und $f_2(\frac{4}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(\frac{4}{3} - 2)^2 = \frac{8}{27}$ als: W($\frac{4}{3}$ | $\frac{8}{27}$). Die <u>Wendetangente</u> besitzt dann auf Grund von:

t: $y = f_2'(\frac{4}{3})(x - \frac{4}{3}) + f_2(\frac{4}{3})$

den Funktionsterm:

t: $y = -\frac{2}{3}x + 1{,}1852$.

y-Achsenabschnittspunkt und Nullstelle der Tangente sind: S_t(0|1,19) (x=0), N_t(1,78|0) (y=0), so dass das von Tangente, x- und y-Achse begrenzte <u>Dreieck</u> die Grundseite g = 1,78 und die Höhe h = 1,19 besitzt. Die Dreiecksfläche bestimmt sich damit als: A = gh/2 = 1,06 FE.

h) Es sei t=8. Die Funktion $f_8(x) = \frac{1}{8}x(x-8)^2$ hat die Nullstellen N(0|0) und N(8|0), wir bilden daher, um das flächenmaximale rechtwinklige Dreieck zu berechnen, die Senkrechte x = u mit 0≤u≤8. Die Senkrechte schneidet die x-Achse im Punkt P(u|0), die Funktion $f_8(x)$ im Punkt Q(u|f_8(u)). Mit O(0|0) ergibt sich damit das rechtwinklige Dreieck OPQ. Dieses Dreieck hat gemäß A = gh/2 (g als Grundseite, h als Höhe) und mit g = u und h = f(u) die Flächeninhaltsfunktion: A(u) = u·f(u)/2, d.h.:

$A(u) = \frac{1}{16}u^2(u-8)^2$.

Wir bestimmen das globale Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) im Intervall [0; 8] und haben als relativen Hochpunkt mit u=4 und A(4)=16: H(4|16). Der relative Hochpunkt ist das globale Maximum wegen A(0) = 0 und A(8) = 0 (Randstellen des Intervalls [0; 8]). Die Ecken des zum Parameter u=4 gehörenden Dreiecks heißen: O(0|0), P(4|0), Q(4|8), die maximale Fläche ist – siehe den Hochpunkt der Flächeninhaltsfunktion – 16 FE groß.

www.michael-buhlmann.de / 03.2016 / Aufgabe 192