**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Funktionenscharen

---

**Aufgabe**: Gegeben sei im Folgenden die Funktionenschar

$$f_a(x) = e^{-ax} + a$$

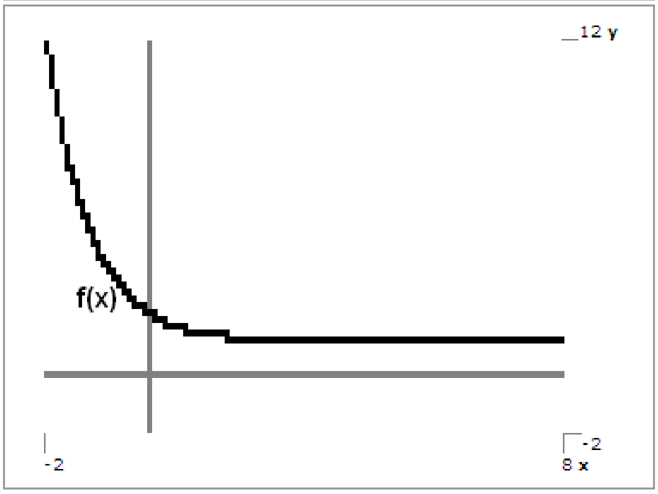
mit Parameter a > 0. $K_a$ sei das Schaubild von $f_a(x)$.

a) Zeichne $K_{1,2}$. Welche Eigenschaften hat die Funktion?
b) Untersuche $K_a$ auf Monotonie und Krümmung.
c) Bestimme Tangente und Normale im Schnittpunkt der Kurve $K_{0,5}$ mit der y-Achse. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Tangente, die Normale und die x-Achse begrenzt wird?
d) Eine Parabel 2. Grades p(x) berührt die Kurve $K_1$ im Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse und besitzt bei x=1 eine Nullstelle. Gib die Funktionsgleichung der Parabel an.
e) Es sei a=2. Berechne die Fläche zwischen der Funktion, der Tangente im Punkt B(0|2), der waagerechten Asymptote und der Geraden x = 4.
f) Es sei a=2. Berechne mit Hilfe einer Stammfunktion die Fläche zwischen der Funktion und der waagerechten Asymptote in den Grenzen x=1 und x=z. Zeige, dass für jedes z > 1 der Wert des Flächeninhalts unter der Zahl 1/5 bleibt.
g) Durch Rotation der Kurve $K_4$ um die x-Achse entsteht auf dem Intervall [0; 5] ein Rotationskörper, der von einem um die x-Achse zentrierten Zylinder mit Durchmesser 4 LE durchbohrt ist. Bestimme das Volumen dieses Körpers.

**Lösung**: a) Es ergibt sich für a=1,2 die Funktion: $f_{1,2}(x) = e^{-1,2x} + 1,2$ mit Wertetabelle und Graph:

| Wertetabelle (f(x) = $f_{1,2}$(x)): | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | **y = f(x)** | **f'(x)** | **f''(x)** | Besondere Kurvenpunkte |
| -2 | 12.2232 | -14.04 | 16.36 | |
| -1.5 | 7.2496 | -7.7 | 8.98 | |
| -1 | 4.5201 | -4.23 | 4.93 | |
| -0.5 | 3.0221 | -2.32 | 2.7 | |
| 0 | 2.2 | -1.27 | 1.48 | Schnittpunkt $S_y$(0\|2.2) |
| 0.5 | 1.7488 | -0.7 | 0.81 | |
| 1 | 1.5012 | -0.38 | 0.45 | |
| 1.5 | 1.3653 | -0.21 | 0.25 | |
| 2 | 1.2907 | -0.12 | 0.13 | |
| 2.5 | 1.2498 | -0.06 | 0.07 | |
| 3 | 1.2273 | -0.03 | 0.04 | |
| 3.5 | 1.215 | -0.02 | 0.02 | |
| 4 | 1.2082 | -0.01 | 0.01 | |
| 4.5 | 1.2045 | -0.01 | 0.01 | |
| 5 | 1.2025 | 0 | 0 | |
| 5.5 | 1.2014 | 0 | 0 | |
| 6 | 1.2007 | 0 | 0 | |
| 6.5 | 1.2004 | 0 | 0 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 1.2002 | 0 | 0 | |
| 7.5 | 1.2001 | 0 | 0 | |
| 8 | 1.2001 | 0 | 0 | |
| Graph: | | | | |




Die Funktion $f_{1,2}(x)$ ist positiv, streng monoton fallend und links gekrümmt. Für x -> ∞ ergibt sich die waagerechte Asymptote y = 1,2. Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $S_y(0|2,2)$.

b) Wir bilden zu $f_a(x) = e^{-ax} + a$ die Ableitungen:

$$f_a'(x) = -ae^{-ax}$$
$$f_a''(x) = a^2 e^{-ax}$$

und erkennen wegen $f_a'(x) < 0$, dass alle Funktionen $f_a(x)$ streng monoton fallend auf dem ganzen maximalen Definitionsbereich **R** sind, wegen $f_a''(x) > 0$, dass alle Funktionen dort links gekrümmt sind. Hoch-, Tief- und Wendepunkte existieren nicht.

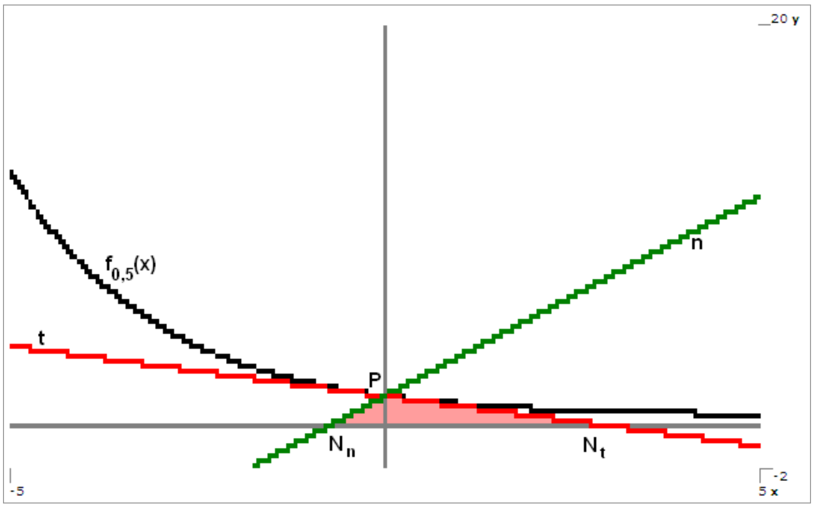
c) Es ist a=0,5 und: $f_{0,5}(x) = e^{-0,5x} + 0,5$ mit: $f_{0,5}'(x) = -0,5e^{-0,5x}$, so dass sich als Tangente im Schnittpunkt der Funktion mit y-Achse, also für $x_0$=u=0 ergibt:

t: $y = f_{0,5}'(0)(x-0) + f_{0,5}(0) = -0,5x + 1,5$.

Analog gilt für die Normale:

n: $y = -\frac{1}{f_{0,5}'(0)}(x-0) + f_{0,5}(0) = -\frac{1}{-0,5}x + 1,5 = 2x + 1,5$.

Tangente und Normale bilden mit der x-Achse ein Dreieck vermöge der Eckpunkte P(0|1,5) (Schnittpunkt von Tangente und Normale auf der Funktion $f_{0,5}(x)$), $N_t(3|0)$ (Nullstelle der Tangente: y = 0 ⇔ -0,5x+1,5 = 0 ⇔ 1,5 = 0,5x ⇔ x = 3), $N_n(-0,75|0)$ (Nullstelle der Normale: y = 0 ⇔ 2x+1,5 = 0 ⇔ 2x = -1,5 ⇔ x = -0,75).



Es gilt:

Dreieck zwischen Tangente, Normale, x-Achse:
$y_t(x) = 0 \Rightarrow x_t = 3 \Rightarrow N_t(3|0)$
$y_n(x) = 0 \Rightarrow x_n = -0.75 \Rightarrow N_n(-0.75|0)$
Dreieck P(0|1.5) $N_t(3|0)$ $N_n(-0,75|0)$
=> Grundseite $g = |x_t - x_n| = 3.75$; Höhe $h = |f(x_0)| = 1.5$ => Dreiecksfläche $A = g*h/2 = 2.8125$

Die Dreiecksfläche hat den Flächeninhalt: A = 2,8125 FE.

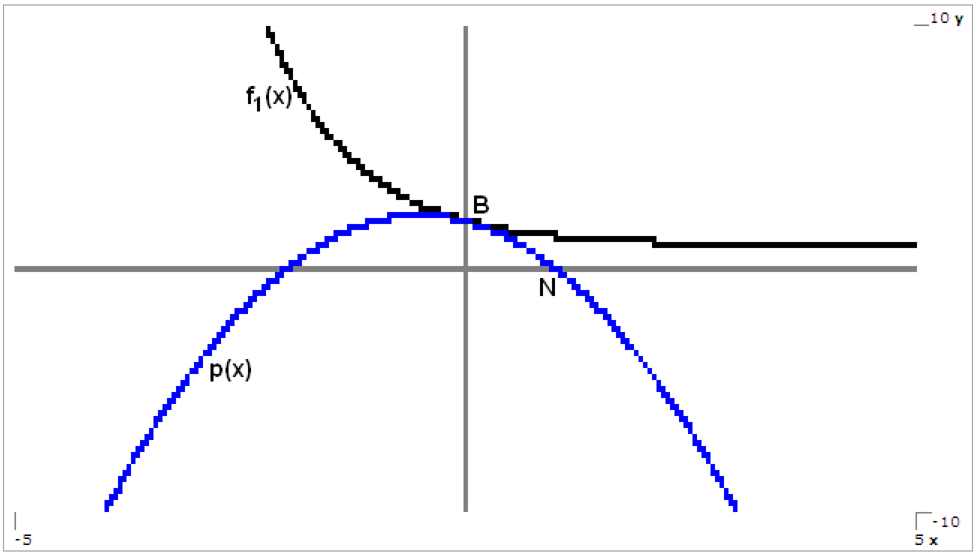
d) Es ist a=1 mit: $f_1(x) = e^{-x} + 1$, $f_1'(x) = -e^{-x}$. Bestimmungsaufgabe: Die Parabel 2. Grades p(x) habe die Form: $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit noch unbekannten reellen Zahlen a, b, c. Die Ableitung von p(x) ist: $p'(x) = 2ax + b$. Der Punkt B(0|2) als Schnittpunkt der Kurve $K_1$ mit der y-Achse ($f_1(0) = 2$) ist Berührpunkt zwischen Funktion $f_1(x)$ und Parabel p(x); also gilt:

$p(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = f_1(0) = 2 \Rightarrow c = 2$
$p'(0) = 2a\cdot 0 + b = f_1'(0) = -1 \Rightarrow b = -1$.

Die Parabel besitzt damit die Funktionsgleichung: $p(x) = ax^2 - x + 2$. Die Nullstelle der Parabel ist N(1|0), so dass sich weiter ergibt:

$p(1) = a\cdot 1^2 - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Die vollständige Gleichung der Parabel lautet daher: $p(x) = -x^2 - x + 2$.

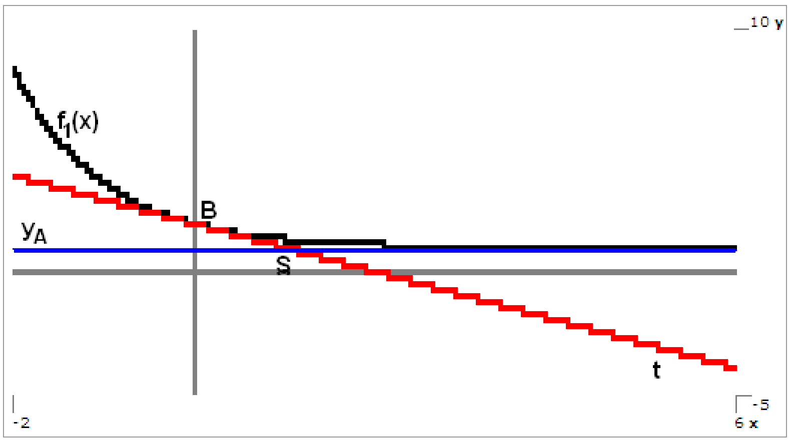



e) Es ist a=1 mit: $f_1(x) = e^{-x} + 1$, $f_1'(x) = -e^{-x}$. Die Tangente im Punkt B(0|2) berechnet sich als:

t: $y_t = f_1'(0)(x-0) + f_1(0) = -x + 2$.

Die waagerechte Asymptote der Funktion $f_1(x)$ ergibt sich aus:

$x \to \infty \Rightarrow f_1(x) \to 1 = y_A$ (waagerechte Asymptote).



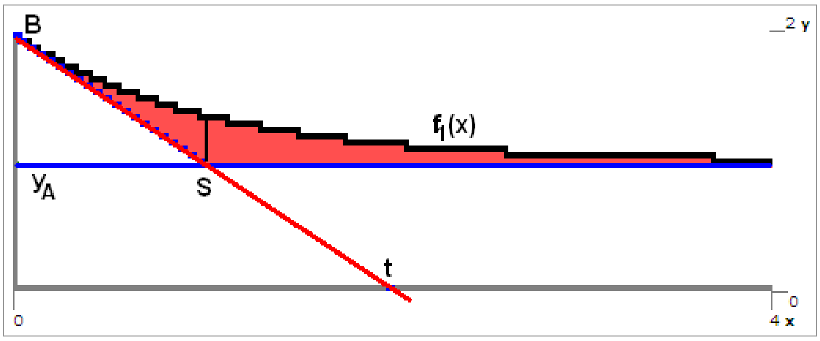

Die Fläche zwischen Funktion $f_1(x)$, Tangente $y_t$, waagerechter Asymptote $y_A$ und den Grenzen 0 (y-Achse) und 4 (Senkrechte x = 4) muss dann am Schnittpunkt von Tangente und Asymptote geteilt werden, also:

$y_t = y_A \Leftrightarrow -x+2 = 1 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$, woraus sich der Schnittpunkt S(1|1) ergibt. Die gesuchte Fläche errechnet sich dann wie folgt:

$$A=\int_0^1 (f_1(x)-y_t)dx+\int_1^4 (f_1(x)-y_A)dx=\int_0^1 [(e^{-x}+1)-(-x+2)]dx+\int_1^4 [(e^{-x}+1)-1]dx=$$

$$\int_0^1 (e^{-x}+x-1)dx+\int_1^4 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1+\left[-e^{-x}\right]_1^4=\left(-e^{-1}-\frac{1}{2}\right)-(-e^0)+(-e^{-4})-(-e^{-1})=$$

$$\frac{1}{2}-e^{-4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e^4}=0,4817\,.$$




f) Es ist a=2 und $f_2(x)=e^{-2x}+2$. Wir berechnen zwischen der Funktion $f_2(x)$ und ihrer Asymptote y = 2 sowie zwischen der unteren Grenze 1 und einer beliebigen oberen Grenze z, z>1, exakt die Fläche A(z) als bestimmtes Integral:

$$A(z)=\int_1^z (f_2(x)-y)dx=\int_1^z (e^{-2x}+2-2)dx=\int_1^z e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^z=-\frac{1}{2}e^{-2z}-\left(-\frac{1}{2}e^{-1}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2z}+\frac{1}{2}e^{-1}=-\frac{1}{2}e^{-2z}+\frac{1}{2e}\,.$$

Für jedes z>1 gilt dann wegen $-\frac{1}{2}e^{-2z}<0$:

$$A(z)=-\frac{1}{2}e^{-2z}+\frac{1}{2e}<\frac{1}{2e}=0,1839<0,2=\frac{1}{5}$$

oder:

z -> ∞ => $A(z)\to\frac{1}{2e}$,

d.h.: Die unendlich lange Fläche $A=\int_1^\infty (f_2(x)-y)dx=\frac{1}{2e}$ (uneigentliches Integral) hat einen endlichen Flächeninhalt kleiner als 1/5.

g) Es ist a=4 und $f_4(x)=e^{-4x}+4$. Der um die x-Achse zentrierte Zylinder mit Durchmesser $d_Z$ = 4 LE, also Radius $r_Z$ = 2 LE hat eine Höhe $h_Z$ = 5 LE, so dass die aus der Geometrie bekannte Formel zur Volumenberechnung $V_Z=\pi r_Z^2 h_Z$ auf:

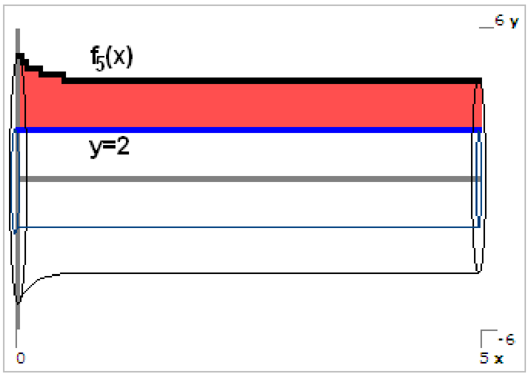
$V_Z = \pi\cdot 2^2\cdot 5 = 20\pi = 62,382$ VE

führt. Den durch Rotation der Funktion $f_2(x)$ um die x-Achse entstehende Rauminhalt $V_f$ berechnen wir über das Volumenintegral:

$$V_f=\pi\int_0^5 (f_4(x))^2dx=\pi\int_0^5 (e^{-4x}+4)^2dx=\pi\int_0^5 (e^{-8x}+8e^{-4x}+16)dx=\pi\left[-\frac{1}{8}e^{-8x}-2e^{-4x}+16x\right]_0^5=$$

$$\pi\left[\left(-\frac{1}{8}e^{-40}-2e^{-20}+80\right)-\left(-\frac{1}{8}-2\right)\right]=\pi\left[82\frac{1}{8}-\frac{2}{e^{20}}-\frac{1}{8e^{40}}\right]=82,125\pi=258,003 \text{ VE}.$$

Das Volumen des durchbohrten Rotationskörpers ist dann: $V = V_f - V_Z$, also:
$V = 258{,}003 - 62{,}382 = 195{,}621$ VE.




www.michael-buhlmann.de / 03.2016 / Aufgabe 193