**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Funktionenscharen

---

**Aufgabe**: Untersuche die ganz rationale Funktionenschar

$$f_t(x) = \frac{x^4}{t} - 11x^2 + 18t$$

mit Parameter t > 0 auf: Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Monotonie, Wendepunkte, Krümmung, Symmetrie, Verhalten für betragsmäßig große x. Wie lauten die Ortskurven der Tief- und Wendepunkte?

**Lösung**: a) Allgemein gilt hinsichtlich der Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) einer ganz rationalen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise, wenn ein Definitionsbereich des Funktionsterm $D_f$ = **R** vorausgesetzt wird:

Die Kurvendiskussion ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion f(x) sich ergebenden Kurve im x-y-Koordinatensystem, des Graphen von f(x). Hinsichtlich einer ganz rationalen Funktion f(x) heißt das:

| **Zentrale Punkte der Kurvendiskussion** |
|---|
| Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ |
| I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor):<br>$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$<br>$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$<br>$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + ... + 6a_3$ |
| II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen):<br>f(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, … -> N($x_1$\|0), N($x_2$\|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel) |
| III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen):<br>a) f'(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, …<br>b) f''($x_1$) < 0 -> H($x_1$\|f($x_1$)) oder f''($x_1$) > 0 -> T($x_1$\|f($x_1$)); f''($x_2$) < 0 -> H($x_2$\|f($x_2$)) oder f''($x_2$) > 0 -> T($x_2$\|f($x_2$)); … |
| IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen):<br>a) f''(x) = 0 -> $x_1$, $x_2$, …<br>b) f'''($x_1$) ≠ 0 -> W($x_1$\|f($x_1$)); f'''($x_2$) ≠ 0 -> W($x_2$\|f($x_2$)); … |
| IVa. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt:<br>f'($x_0$) = 0, f''($x_0$) = 0, f'''($x_0$) ≠ 0 -> S($x_0$\|f($x_0$)) |

**Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen**

| **Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion** |
|---|
| V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, $x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):<br>– Monotonieintervall (-∞, $x_1$): f(x) monoton steigend ($x_1$ als Hochpunkt, f'($x_0$)>0) oder monoton fallend ($x_1$ als Tiefpunkt, f'($x_0$)<0);<br>– Monotonieintervall ($x_1$, $x_2$): f(x) monoton fallend ($x_1$ als Hochpunkt, $x_2$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'($x_0$)<0) oder monoton steigend ($x_1$ als Tiefpunkt, $x_2$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'($x_0$)>0); …<br>– Monotonieintervall ($x_n$, ∞): f(x) monoton fallend ($x_n$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'($x_0$)<0) oder monoton steigend ($x_n$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'($x_0$)>0) |
| VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, $x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):<br>– Krümmungsintervall (-∞, $x_1$): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''($x_0$)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''($x_0$)<0);<br>– Krümmungsintervall ($x_1$, $x_2$): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''($x_0$)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''($x_0$)>0); … |

– Krümmungsintervall ($x_n$, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

VII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade)
c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.
f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

| $a_n>0$ | n ungerade | n gerade | $a_n<0$ | n ungerade | n gerade |
|---|---|---|---|---|---|
| x->∞ | f(x) -> ∞ | f(x) -> ∞ | x->∞ | f(x) -> -∞ | f(x) -> -∞ |
| x->-∞ | f(x) -> -∞ | f(x) -> ∞ | x->-∞ | f(x) -> ∞ | f(x) -> -∞ |



b) I. Die Ableitungen der Parameterfunktion $f_t(x)=\frac{x^4}{t}-11x^2+18t$ lauten:

$f_t'(x)=\frac{4}{t}x^3-22x$ (1. Ableitung)

$f_t''(x)=\frac{12}{t}x^2-22$ (2. Ableitung)

$f_t'''(x)=\frac{24}{t}x$ (3. Ableitung).

II. Die Nullstellen der Funktion $f_t(x)=\frac{x^4}{t}-11x^2+18t$ berechnen sich wie folgt:

$$f_t(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{t}-11x^2+18t=0 \Leftrightarrow x^4-11tx^2+18t^2=0 \Leftrightarrow z^2-11tz+18t^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{11t}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{11t}{2}\right)^2-18t^2} \Leftrightarrow z=\frac{11t}{2}\pm\sqrt{\frac{121t^2}{4}-\frac{72t^2}{4}}=\frac{11t}{2}\pm\sqrt{\frac{49t^2}{4}}=\frac{11t}{2}\pm\frac{7t}{2} \Leftrightarrow$$

$$z=2t \vee z=9t \Leftrightarrow x^2=2t \vee x^2=9t \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2t} \vee x=\pm\sqrt{9t} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2t} \vee x=\pm3\sqrt{t}$$

mit der Substitution z = $x^2$ und wegen t>0. Nullstellen der Funktion sind somit:

$x=-3\sqrt{t}, x=-\sqrt{2t}, x=\sqrt{2t}, x=3\sqrt{t}$ oder: $N_1(-3\sqrt{t}\,|0)$, $N_2(-\sqrt{2t}\,|0)$, $N_3(\sqrt{2t}\,|0)$, $N_4(3\sqrt{t}\,|0)$.

III. Hoch- und Tiefpunkte liegen auf der Funktion $f_t(x)=\frac{x^4}{t}-11x^2+18t$ dort, wo waagerechte Tangenten auftreten; also gilt (die notwendige Bedingung):

$$f_t'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{t}x^3-22x=0 \Leftrightarrow 4x^3-22tx=0 \Leftrightarrow 2x(2x^2-11t)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 2x^2-11t=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee 2x^2=11t \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=\frac{11t}{2} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{\frac{11t}{2}}$$

Wir überprüfen die Existenz von Extrema mit Hilfe der 2. Ableitung und erhalten:

$f_t''(0)=0-22=-22<0$ => x = 0 Hochpunkt mit H(0|18t)

$f_t''(\pm\sqrt{\frac{11t}{2}})=\frac{12}{t}\cdot\frac{11t}{2}-22=66-22=44>0$ => $x=\pm\sqrt{\frac{11t}{2}}$ Tiefpunkte mit $T_1(-\sqrt{\frac{11t}{2}}\,|-\frac{49t}{4})$ bzw. $T_2(\sqrt{\frac{11t}{2}}\,|-\frac{49t}{4})$.

IV. Wegen der Extremwerte $x=-\sqrt{\frac{11t}{2}}, x=0, x=\sqrt{\frac{11t}{2}}$ sind die Monotonieintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

| $(-\infty, -\sqrt{\frac{11t}{2}})$ | $(-\sqrt{\frac{11t}{2}}, 0)$ | $(0, \sqrt{\frac{11t}{2}})$ | $(\sqrt{\frac{11t}{2}}, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| Tiefpunkt | Hochpunkt | Tiefpunkt | |
| $f_t$ monoton fallend | $f_t$ monoton steigend | $f_t$ monoton fallend | $f_t$ monoton steigend |

V. Hinsichtlich der Wendepunkte berechnen wir (notwendige Bedingung)

$$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{t}x^2 - 22 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 22t = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 22t \Leftrightarrow x^2 = \frac{22t}{12} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11t}{6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{11t}{6}}$$

und (hinreichende Bedingung):

$f_t'''(\pm\sqrt{\frac{11t}{6}}) = \pm\frac{24}{t}\cdot\sqrt{\frac{11t}{6}} \neq 0$ => $x = \pm\sqrt{\frac{11t}{6}}$ Wendepunkte mit $W_1(-\sqrt{\frac{11t}{6}}\,|-\frac{43t}{36})$ bzw. $W_2(\sqrt{\frac{11t}{6}}\,|-\frac{43t}{36})$.

VI. Auf Grund der Wendepunkte $x = -\sqrt{\frac{11t}{6}}, x = \sqrt{\frac{11t}{6}}$ sind die Krümmungsintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

| $(-\infty, -\sqrt{\frac{11t}{6}})$ | $(-\sqrt{\frac{11t}{6}}, \sqrt{\frac{11t}{6}})$ | $(\sqrt{\frac{11t}{6}}, +\infty)$ |
|---|---|---|
| Wendepunkt | Wendepunkt | |
| $f_t$ links gekrümmt | $f_t$ rechts gekrümmt (wegen x=0 Hochpunkt) | $f_t$ links gekrümmt |

VII. Hinsichtlich des Verhaltens für betragsmäßig große x (Verhalten für x gegen ±∞) ist zu sagen: Der Term $x^4$ ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion mit Koeffizienten 1. D.h., es gilt wegen t>0:

$$x \to \infty \Rightarrow f_t(x) \to \infty$$
$$x \to -\infty \Rightarrow f_t(x) \to \infty.$$

VIII. Symmetrie: Die Funktion $f_t(x) = \frac{x^4}{t} - 11x^2 + 18t$ ist achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse wegen der in der Funktionsgleichung auftretenden geraden x-Potenzen. Es gilt zudem:

$$f_t(-x) = \frac{(-x)^4}{t} - 11(-x)^2 + 18t = \frac{x^4}{t} - 11x^2 + 18t = f_t(x),$$

womit die Achsensymmetrie bewiesen wäre.

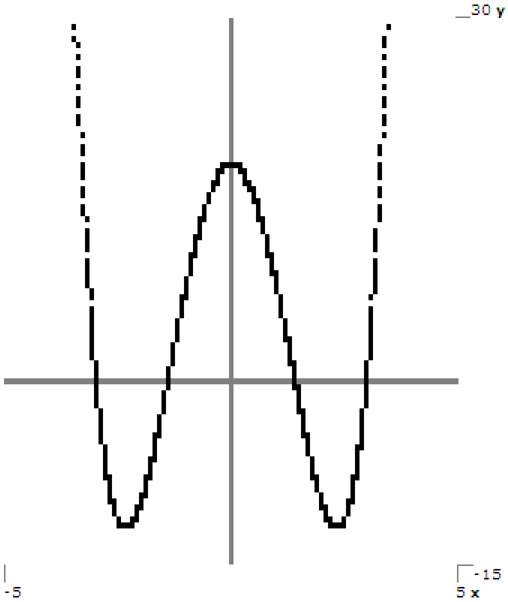
c) Für spezielle t>0 ergeben sich dann von folgende Funktionsgraphen:

t=1: $f(x) = f_1(x) = x^4 - 11x^2 + 18$

Wertetabelle:

| x | y = f(x) | f'(x) | f''(x) | f'''(x) | Besondere Kurvenpunkte |
|---|---|---|---|---|---|
| -3 | 0 | -42 | 86 | -72 | Nullstelle N(-3\|0) |
| -2.34 | -12.2494 | 0.2284 | 43.7072 | -56.16 | Tiefpunkt T(-2.34\|-12.25) |
| -1.41 | 0.0834 | 19.8071 | 1.8572 | -33.84 | Nullstelle N(-1.41\|0.08) |
| -1.35 | 1.274 | 19.8585 | -0.13 | -32.4 | Wendepunkt W(-1.35\|1.27) |
| 0 | 18 | 0 | -22 | 0 | Schnittpunkt $S_y$(0\|18) = Hochpunkt H(0\|18) |
| 1.36 | 1.0754 | -19.8582 | 0.1952 | 32.64 | Wendepunkt W(1.36\|1.08) |
| 1.42 | -0.1145 | -19.7868 | 2.1968 | 34.08 | Nullstelle N(1.42\|-0.11) |
| 2.35 | -12.2495 | 0.2115 | 44.27 | 56.4 | Tiefpunkt T(2.35\|-12.25) |
| 3 | 0 | 42 | 86 | 72 | Nullstelle N(3\|0) |

Graph:

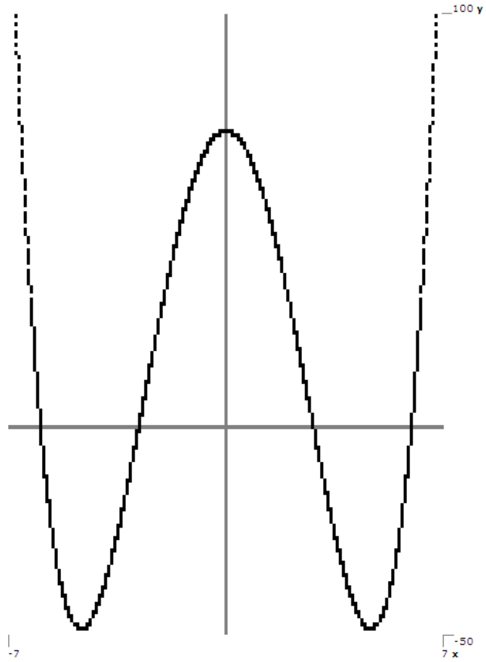



t=4: $f(x) = f_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - 11x^2 + 72$

Wertetabelle:

| x | y = f(x) | f'(x) | f''(x) | f'''(x) | Besondere Kurvenpunkte |
|---|---|---|---|---|---|
| -6 | 0 | -84 | 86 | -36 | Nullstelle N(-6\|0) |
| -4.69 | -49 | 0.0183 | 43.9883 | -28.14 | Tiefpunkt T(-4.69\|-49) |
| -2.82 | 0.3338 | 39.6142 | 1.8572 | -16.92 | Nullstelle N(-2.82\|0.33) |
| -2.7 | 5.096 | 39.717 | -0.13 | -16.2 | Wendepunkt W(-2.7\|5.1) |
| 0 | 72 | 0 | -22 | 0 | Schnittpunkt $S_y$(0\|72) = Hochpunkt H(0\|72) |
| 2.71 | 4.6989 | -39.7175 | 0.0323 | 16.26 | Wendepunkt W(2.71\|4.7) |
| 2.83 | -0.0623 | -39.5948 | 2.0267 | 16.98 | Nullstelle N(2.83\|-0.06) |
| 4.7 | -48.998 | 0.423 | 44.27 | 28.2 | Tiefpunkt T(4.7\|-49) |
| 6 | 0 | 84 | 86 | 36 | Nullstelle N(6\|0) |

Graph:



d) I. Wir bestimmen zunächst die <u>Ortskurve der Tiefpunkte</u> der Funktionen $f_t(x) = \frac{x^4}{t} - 11x^2 + 18t$, t>0. Wie oben errechnet, sind die Tiefpunkte von der Form T($\pm\sqrt{\frac{11t}{2}}$ | $-\frac{49t}{4}$) mit der x-Koordinate x = $\pm\sqrt{\frac{11t}{2}}$ und der y-Koordinate y = $-\frac{49t}{4}$. Zur Ermittlung der Ortskurve stellen wir die x-Koordinate nach t um und erhalten u.a. durch Quadrieren:

$x = \pm\sqrt{\frac{11t}{2}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2}{11}x^2$.

Das t der y-Koordinate ersetzen wir dann durch den Ausdruck mit x, also:

$t = \frac{2}{11}x^2$ => y = $-\frac{49 \cdot \frac{2}{11}x^2}{4} = -\frac{49}{22}x^2$.

Die Ortskurve der Tiefpunkte lautet damit: $y = -\frac{49}{22}x^2$, x ≠ 0 (da t>0).

II. Entsprechend der Ortskurve der Tiefpunkte berechnen wir die <u>Ortskurve der Wendepunkte</u> der Funktionen $f_t(x) = \frac{x^4}{t} - 11x^2 + 18t$, t>0. Wie oben errechnet, sind die Wendepunkte von der Form W($\pm\sqrt{\frac{11t}{6}}$ | $-\frac{43t}{36}$), so dass das Umstellen nach t in der x-Koordinate des Wendepunkts ergibt:

$x = \pm\sqrt{\frac{11t}{6}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11t}{6} \Leftrightarrow t = \frac{6}{11}x^2$.

Einsetzen von t in die y-Koordinate des Wendepunkts führt auf die Ortskurve:

$t = \frac{6}{11}x^2$ => y = $-\frac{43 \cdot \frac{6}{11}x^2}{36} = -\frac{43}{66}x^2$,

so dass $y = -\frac{43}{66}x^2$, x ≠ 0, die Ortskurve der Wendepunkte darstellt.