Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Untersuche die Funktionenschar

$$f_t(x) = (x+t)\cdot e^{x-t}$$

mit beliebigem reellen Parameter t auf: Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Monotonie, Wendepunkte, Krümmung, Verhalten für betragsmäßig große x. Wie lauten die Ortskurven der Tief- und Wendepunkte?

Lösung: a) Allgemein gilt: Exponentialfunktionen sind Funktionen f: D_f -> **R** vom Typ f(x) = $e^{p(x)}$, etwa mit p(x) als u.a. als ganz rationale Funktion im Exponenten. Dann gilt für die Ableitung von f(x) nach der Kettenregel: f'(x) = $e^{p(x)}\cdot p'(x)$. Für Funktionen f(x) = $q(x)\cdot e^{p(x)}$, die sich als Produkte von ganz rationaler Funktion q(x) und Exponentialfunktion $e^{p(x)}$ darstellen, sind die Ableitungen dann nach der Produktregel zu ermitteln; man erhält wieder ein Funktion vom selben Typ, so dass Nullstellen von Funktion und Ableitungen Nullstellen des jeweiligen ganz rationalen Anteils des Produktes sind.
Bei einer Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) einer Funktion f(x) sind im Wesentlichen folgende Punkte zu beachten: I. Ableitungen (f'(x), f''(x), f'''(x)), II. Nullstellen (f(x)=0), III. Hoch- und Tiefpunkte (f'(x)=0, f''(x_H)<0, f''(x_T)>0), IV. Monotonie zwischen den Extrempunkten, V. Wendepunkte (f''(x)=0, f'''(x_W)≠0), VI. Krümmung zwischen den Wendepunkten, VII. Verhalten für x-> ±∞, Asymptoten (Grenzgeraden, Grenzfunktionen).

b) I. Als <u>Ableitungen</u> der Funktionen $f_t(x) = (x+t)\cdot e^{x-t}$ ergeben sich gemäß der Produktregel:

$$f_t'(x) = 1\cdot e^{x-t} + (x+t)\cdot e^{x-t}\cdot 1 = (x+t+1)\cdot e^{x-t}$$

$$f_t''(x) = 1\cdot e^{x-t} + (x+t+1)\cdot e^{x-t}\cdot 1 = (x+t+2)\cdot e^{x-t}$$

$$f_t'''(x) = 1\cdot e^{x-t} + (x+t+2)\cdot e^{x-t}\cdot 1 = (x+t+3)\cdot e^{x-t}\,.$$

II. Hinsichtlich der <u>Nullstellen</u> gilt:

$$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow (x+t)\cdot e^{x-t} = 0 \Leftrightarrow x+t = 0 \Leftrightarrow x = -t$$

Also gehört zu f_t die Nullstelle N(-t|0).

III. Hinsichtlich der eventuellen <u>Hoch- und Tiefpunkte</u> ergibt sich:

$$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+t+1)\cdot e^{x-t} = 0 \Leftrightarrow x+t+1 = 0 \Leftrightarrow x = -t-1$$

An der kritischen Stelle x = -t–1 liegt ein Tiefpunkt vor wegen:

$$f_t''(-t-1) = (-t-1+t+2)\cdot e^{-t-1-t} = e^{-2t-1} > 0$$

und mit: T(-t-1|-e^{-2t-1})

IV. Es ergeben sich für die <u>Monotonie</u> der Funktionen $f_t(x) = (x+t)\cdot e^{x-t}$ die Monotonieintervalle:

(-∞; -t-1): f(x) monoton fallend
(-t-1; ∞): f(x) monoton steigend.

V. Die notwendige Bedingung für <u>Wendepunkte</u> führt auf:

$$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+t+2)\cdot e^{x-t} = 0 \Leftrightarrow x+t+2 = 0 \Leftrightarrow x = -t-2$$

Die hinreichende Bedingung für die kritische Stelle ergibt die Existenz eines Wendepunktes:

$$f_t'''(-t-2) = 1\cdot e^{-2t-2} \neq 0$$

mit: W(-t-2|-$2e^{-2t-2}$).

VI. Hinsichtlich der Krümmung der Funktionen der Funktionenschar haben wir die folgenden Krümmungsintervalle:

(-∞; -t-2): f(x) rechts gekrümmt
(-t-2; ∞): f(x) links gekrümmt.

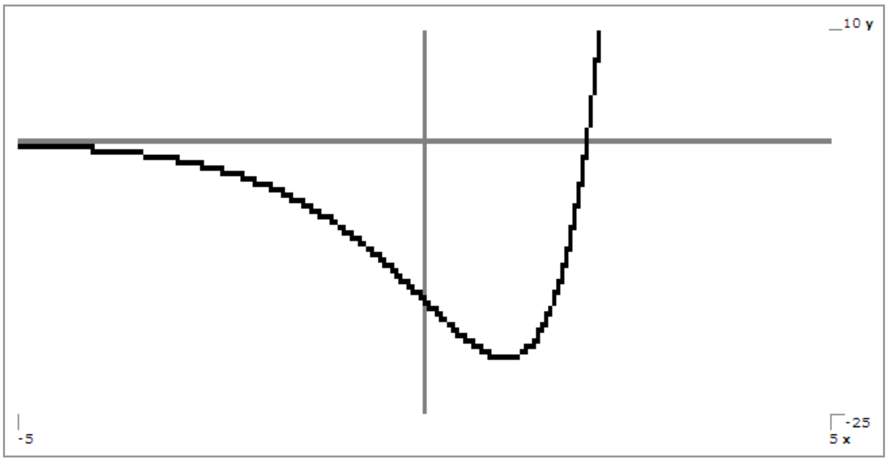
VII. Wegen des Verhaltens von y = e^{x-t} für betragsmäßig große x folgt für alle Funktionen $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$ der Funktionenschar:

x -> ∞ => f(x) -> ∞
x -> -∞ => f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote.

c) Wir zeichnen einige Funktionen der Funktionenschar $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$:

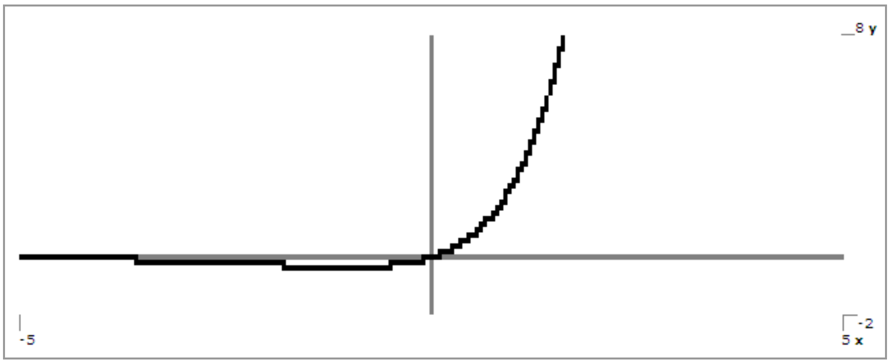
t=-2: $f(x) = f_{-2}(x) = (x-2) \cdot e^{x+2}$

Wertetabelle:				
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-0.005	-14.7412	-7.39	-0.04	Wendepunkt W(0|-14.74)
0	-14.7781	-7.39	0	Schnittpunkt S_y(0|-14.78)
0.995	-20.0853	-0.1	19.89	Tiefpunkt T(1|-20.09)
2	0	54.6	109.2	Nullstelle N(2|0)
Graph:				



t=0: $f(x) = f_0(x) = x \cdot e^x$

Wertetabelle:				
	y = f(x)	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-2.005	-0.27	-0.14	0	Wendepunkt W(-2|-0.27)
-1.005	-0.3679	0	0.36	Tiefpunkt T(-1.01|-0.37)
0	0	1	2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
Graph:				



t=1: $f(x) = f_1(x) = (x+1) \cdot e^{x-1}$

Wertetabelle:				
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-3.005	-0.0365	-0.02	0	Wendepunkt W(-3|-0.04)
-2.005	-0.0498	0	0.05	Tiefpunkt T(-2|-0.05)
-1	0	0.14	0.27	Nullstelle N(-1|0)
0	0.3679	0.74	1.1	Schnittpunkt S_y(0|0.37)

Graph:

d) I. Wir bestimmen zunächst die Ortskurve der Tiefpunkte der Funktionen $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$.
Wegen T(-t-1|-e^{-2t-1}), x = -t-1, y = -e^{-2t-1} folgt (Umstellen der x-Koordinate des Tiefpunkts nach t):
x = -t-1 ⇔ x+t = -1 ⇔ t = -x-1
und weiter (Einsetzen von t als x-Ausdruck in y-Koordinate des Tiefpunkts):
y = -e^{-2t-1} = -$e^{-2(-x-1)-1}$ = -e^{2x+1},
so dass y = -e^{2x-1} die Ortskurve der Tiefpunkte ist.
II. Wir bestimmen die Ortskurve der Wendepunkte der Funktionen $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$. Wegen W(-t-2|-$2e^{-2t-2}$), x = -t-2, y = -2$e^{-2t-2}$ folgt (Umstellen der x-Koordinate des Wendepunkts nach t):
x = -t-2 ⇔ x+t = -2 ⇔ t = -x-2
und weiter (Einsetzen von t als x-Ausdruck in y-Koordinate des Wendepunkts):
y = -2e^{-2t-2} = -2$e^{-2(-x-2)-2}$ = -2e^{2x+2},
so dass y = -2e^{2x+2} die Ortskurve der Wendepunkte ist.