

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Funktionenschar

**Aufgabe:** Untersuche die Funktionenschar

$$f_t(x) = (x+t) \cdot e^{-x-t}$$

mit beliebigem reellen Parameter  $t$  auf: Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Monotonie, Wendepunkte, Krümmung, Verhalten für betragsmäßig große  $x$ . Wie lauten die Ortskurven der Tief- und Wendepunkte?

**Lösung:** a) Allgemein gilt: Exponentialfunktionen sind Funktionen  $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$  vom Typ  $f(x) = e^{p(x)}$ , etwa mit  $p(x)$  als u.a. als ganz rationale Funktion im Exponenten. Dann gilt für die Ableitung von  $f(x)$  nach der Kettenregel:  $f'(x) = e^{p(x)} \cdot p'(x)$ . Für Funktionen  $f(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$ , die sich als Produkte von ganz rationaler Funktion  $q(x)$  und Exponentialfunktion  $e^{p(x)}$  darstellen, sind die Ableitungen dann nach der Produktregel zu ermitteln; man erhält wieder eine Funktion vom selben Typ, so dass Nullstellen von Funktion und Ableitungen Nullstellen des jeweiligen ganz rationalen Anteils des Produktes sind.

Bei einer Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) einer Funktion  $f(x)$  sind im Wesentlichen folgende Punkte zu beachten: I. Ableitungen ( $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ ), II. Nullstellen ( $f(x)=0$ ), III. Hoch- und Tiefpunkte ( $f'(x)=0$ ,  $f''(x_H)<0$ ,  $f''(x_T)>0$ ), IV. Monotonie zwischen den Extrempunkten, V. Wendepunkte ( $f''(x)=0$ ,  $f'''(x_W) \neq 0$ ), VI. Krümmung zwischen den Wendepunkten, VII. Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ , Asymptoten (Grenzgeraden, Grenzfunktionen).

b) I. Als Ableitungen der Funktionen  $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{-x-t}$  ergeben sich gemäß der Produktregel:

$$f_t'(x) = 1 \cdot e^{-x-t} + (x+t) \cdot e^{-x-t} \cdot (-1) = (x+t-1) \cdot e^{-x-t}$$

$$f_t''(x) = 1 \cdot e^{-x-t} + (x+t-1) \cdot e^{-x-t} \cdot (-1) = (x+t-2) \cdot e^{-x-t}$$

$$f_t'''(x) = 1 \cdot e^{-x-t} + (x+t-2) \cdot e^{-x-t} \cdot (-1) = (x+t-3) \cdot e^{-x-t}$$

II. Hinsichtlich der Nullstellen gilt:

$$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow (x+t) \cdot e^{-x-t} = 0 \Leftrightarrow x+t = 0 \Leftrightarrow x = -t$$

Also gehört zu  $f_t$  die Nullstelle  $N(-t|0)$ .

III. Hinsichtlich der eventuellen Hoch- und Tiefpunkte ergibt sich:

$$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+t-1) \cdot e^{-x-t} = 0 \Leftrightarrow x+t-1 = 0 \Leftrightarrow x = -t-1$$

An der kritischen Stelle  $x = -t-1$  liegt ein Tiefpunkt vor wegen:

$$f_t''(-t-1) = (-t-1+t-2) \cdot e^{-(-t-1)-t} = e^{-2t-1} > 0$$

und mit:  $T(-t-1|-e^{-2t-1})$

IV. Es ergeben sich für die Monotonie der Funktionen  $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{-x-t}$  die Monotonieintervalle:

$(-\infty; -t-1)$ :  $f(x)$  monoton fallend

$(-t-1; \infty)$ :  $f(x)$  monoton steigend.

V. Die notwendige Bedingung für Wendepunkte führt auf:

$$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+t-2) \cdot e^{-x-t} = 0 \Leftrightarrow x+t-2 = 0 \Leftrightarrow x = -t-2$$

Die hinreichende Bedingung für die kritische Stelle ergibt die Existenz eines Wendepunktes:

$$f_t'''(-t-2) = 1 \cdot e^{-(-t-2)-t} = e^{-2t-2} \neq 0$$

mit:  $W(-t-2|-2e^{-2t-2})$ .

VI. Hinsichtlich der Krümmung der Funktionen der Funktionenschar haben wir die folgenden Krümmungsintervalle:

$(-\infty; -t-2)$ :  $f(x)$  rechts gekrümmt

$(-t-2; \infty)$ :  $f(x)$  links gekrümmt.

VII. Wegen des Verhaltens von  $y = e^{x-t}$  für betragsmäßig große  $x$  folgt für alle Funktionen

$f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$  der Funktionenschar:

$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$

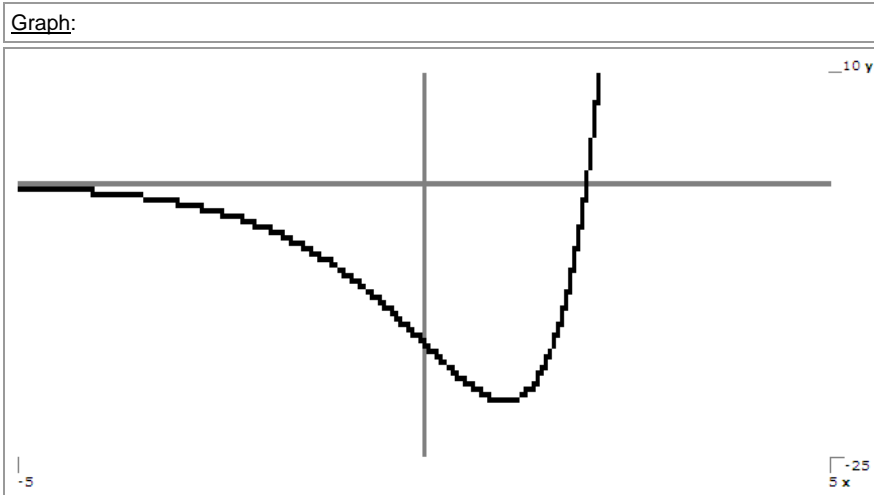
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 = y$  als waagerechte Asymptote.

c) Wir zeichnen einige Funktionen der Funktionenschar  $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$ :

$t=-2$ :  $f(x) = f_{-2}(x) = (x-2) \cdot e^{x+2}$

Wertetabelle:

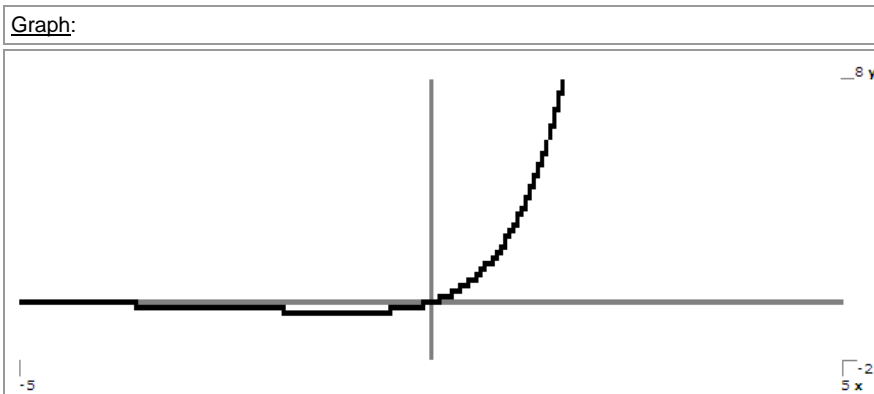
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.005	-14.7412	-7.39	-0.04	Wendepunkt W(0 -14.74)
0	-14.7781	-7.39	0	Schnittpunkt $S_y(0 -14.78)$
0.995	-20.0853	-0.1	19.89	Tiefpunkt T(1 -20.09)
2	0	54.6	109.2	Nullstelle N(2 0)



$t=0$ :  $f(x) = f_0(x) = x \cdot e^x$

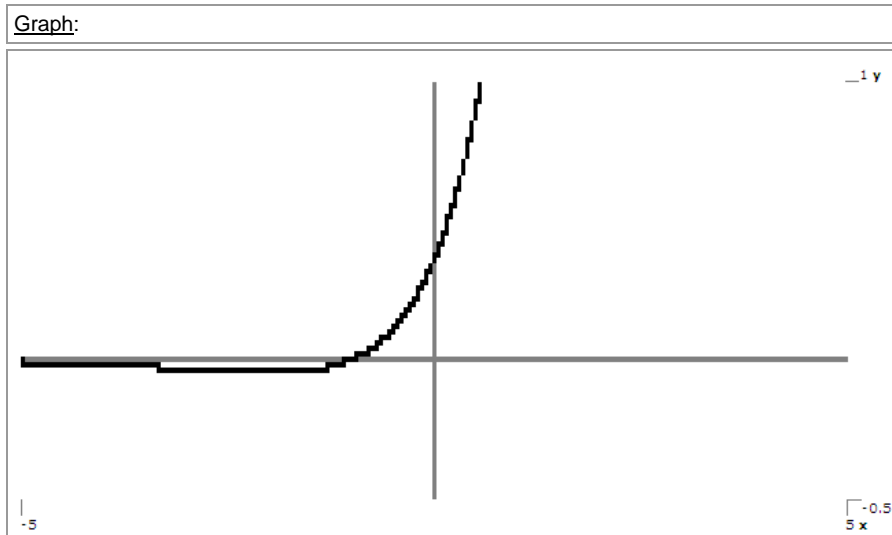
Wertetabelle:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2.005	-0.27	-0.14	0	Wendepunkt W(-2 -0.27)
-1.005	-0.3679	0	0.36	Tiefpunkt T(-1.01 -0.37)
0	0	1	2	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt $S_y(0 0)$



$t=1: f(x) = f_1(x) = (x+1) \cdot e^{x-1}$

Wertetabelle:				
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.005	-0.0365	-0.02	0	Wendepunkt W(-3 -0.04)
-2.005	-0.0498	0	0.05	Tiefpunkt T(-2 -0.05)
-1	0	0.14	0.27	Nullstelle N(-1 0)
0	0.3679	0.74	1.1	Schnittpunkt S <sub>y</sub> (0 0.37)



d) I. Wir bestimmen zunächst die Ortskurve der Tiefpunkte der Funktionen  $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$ .

Wegen  $T(-t-1|-e^{-2t-1})$ ,  $x = -t-1$ ,  $y = -e^{-2t-1}$  folgt (Umstellen der x-Koordinate des Tiefpunkts nach t):

$$x = -t-1 \Leftrightarrow x+t = -1 \Leftrightarrow t = -x-1$$

und weiter (Einsetzen von t als x-Ausdruck in y-Koordinate des Tiefpunkts):

$$y = -e^{-2t-1} = -e^{-2(-x-1)-1} = -e^{2x+1},$$

so dass  $y = -e^{2x+1}$  die Ortskurve der Tiefpunkte ist.

II. Wir bestimmen die Ortskurve der Wendepunkte der Funktionen  $f_t(x) = (x+t) \cdot e^{x-t}$ . Wegen

$W(-t-2|-2e^{-2t-2})$ ,  $x = -t-2$ ,  $y = -2e^{-2t-2}$  folgt (Umstellen der x-Koordinate des Wendepunkts nach t):

$$x = -t-2 \Leftrightarrow x+t = -2 \Leftrightarrow t = -x-2$$

und weiter (Einsetzen von t als x-Ausdruck in y-Koordinate des Wendepunkts):

$$y = -2e^{-2t-2} = -2e^{-2(-x-2)-2} = -2e^{2x+2},$$

so dass  $y = -2e^{2x+2}$  die Ortskurve der Wendepunkte ist.

