

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Funktionenschar

Aufgabe: Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_t(x) = t \cos(tx)$$

mit reellen Parameter $t > 0$. Die zugehörigen Schaubilder heißen K_t .

- Skizziere die Schaubilder $K_{0,5}$, K_1 und K_2 jeweils auf dem Intervall $[-\pi; 2\pi]$.
- Zeige: Der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve K_t und den Achsen des Koordinatensystems im 1. Quadranten ist unabhängig von t .
- Es sei $t = \pi/2$. Konstruiere an die Kurve $K_{\pi/2}$ eine Parabel 2. Grades der Form $p(x) = a(x-b)^2$, die die Kosinuskurve an der Stelle $x = 2/3$ berührt.
- Berechne die Fläche zwischen der Parabel $p(x)$ und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im 1. Quadranten des Koordinatensystems.
- Die gemeinsame Tangente zwischen der Parabel $p(x)$ und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im Berührungspunkt zwischen Parabel und Kosinusfunktion teilt die Fläche zwischen der Parabel $p(x)$ und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im 1. Quadranten des Koordinatensystems. Berechne eine Teilfläche und das Verhältnis der beiden Flächeninhalte zueinander.
- Bestimme die maximale Abweichung zwischen der Parabel $p(x)$ und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im Intervall $[0; 1]$.
- Es sei $t = 2,5$. Wie lautet die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt $P(4|0)$ verläuft und die Kurve $K_{2,5}$ im Intervall $[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}]$ berührt?
- Es sei $t = 1,5$. Welcher Punkt auf der Kurve $K_{1,5}$ hat den kleinsten Abstand zum Punkt $R(3|1)$?

Lösung: a) Wertetabelle und Graph ergeben jeweils:

$t=0,5$: $f_{0,5}(x) = 0,5 \cos(0,5x)$

Wertetabelle:				
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.15	-0.0021	0.25	0	Nullstelle N(-3.15 0) = Wendepunkt W(-3.15 0)
0	0.5	0	-0.12	Schnittpunkt S _y (0 0.5) = Hochpunkt H(0 0.5)
3.14	0.0004	-0.25	0	Nullstelle N(3.14 0) = Wendepunkt W(3.14 0)
6.28	-0.5	0	0.12	Tiefpunkt T(6.28 -0.5)

Graph:

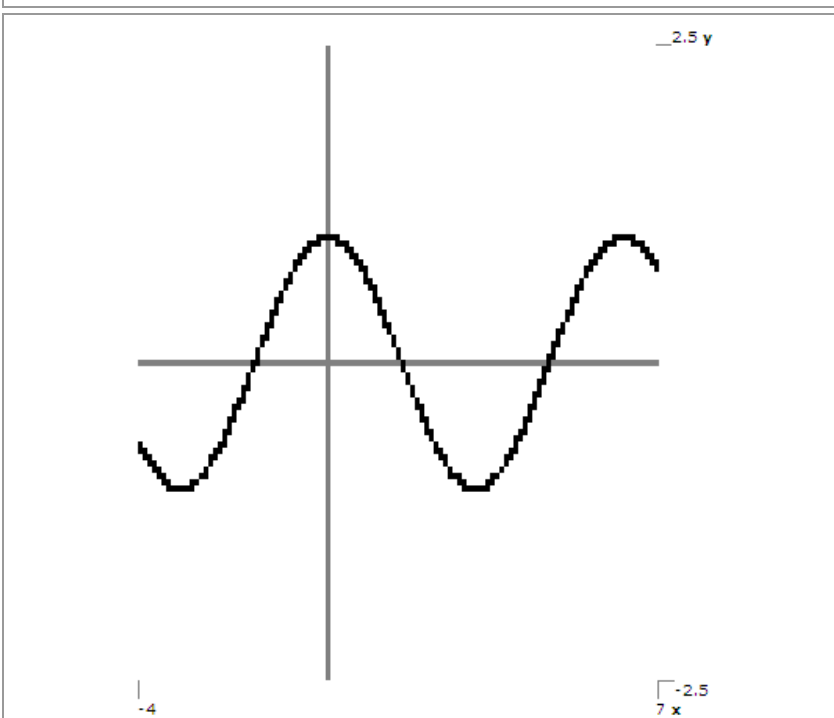


$t=1: f_1(x) = \cos(x)$

Wertetabelle:

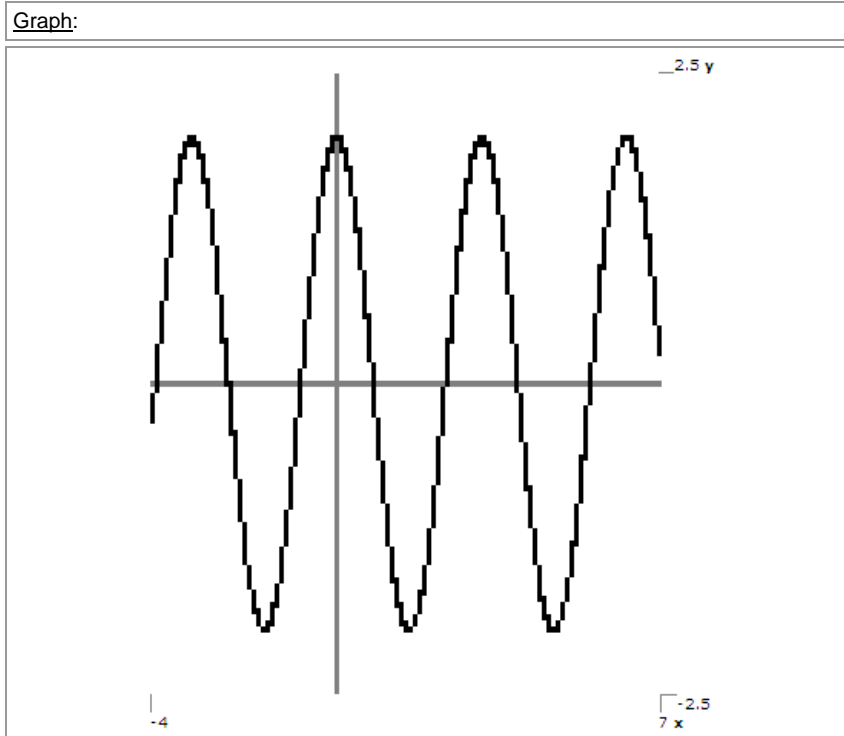
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.15	-1	-0.01	1	Tiefpunkt T(-3.15 -1)
-1.58	-0.0092	1	0.01	Nullstelle N(-1.58 0.01) = Wendepunkt W(-1.58 0.01)
0	1	0	-1	Schnittpunkt S _y (0 1) = Hochpunkt H(0 1)
1.57	0.0008	-1	0	Nullstelle N(1.57 0) = Wendepunkt W(1.57 0)
3.14	-1	0	1	Tiefpunkt T(3.14 -1)
4.71	-0.0024	1	0	Nullstelle N(4.71 0) = Wendepunkt W(4.71 0)
6.28	1	0	-1	Hochpunkt H(6.28 1)

Graph:



$$t=2: f_2(x) = 2 \cos(2x)$$

Wertetabelle:				
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.93	-0.012	4	0.05	Nullstelle N(-3.93 -0.01) = Wendepunkt W(-3.93 -0.01)
-3.15	1.9997	0.07	-8	Hochpunkt H(-3.15 2)
-2.36	0.0152	-4	-0.06	Nullstelle N(-2.36 0.02) = Wendepunkt W(-2.36 0.02)
-1.58	-1.9997	-0.07	8	Tiefpunkt T(-1.58 -2)
-0.79	-0.0184	4	0.07	Nullstelle N(-0.79 -0.02) = Wendepunkt W(-0.79 -0.02)
0	2	0	-8	Schnittpunkt S _y (0 2) = Hochpunkt H(0 2)
0.78	0.0216	-4	-0.09	Nullstelle N(0.78 0.02) = Wendepunkt W(0.78 0.02)
1.57	-2	-0.01	8	Tiefpunkt T(1.57 -2)
2.35	-0.0248	4	0.1	Nullstelle N(2.35 -0.02) = Wendepunkt W(2.35 -0.02)
3.14	2	0.01	-8	Hochpunkt H(3.14 2)
3.92	0.028	-4	-0.11	Nullstelle N(3.92 0.03) = Wendepunkt W(3.92 0.03)
4.71	-2	-0.02	8	Tiefpunkt T(4.71 -2)
5.49	-0.0311	4	0.12	Nullstelle N(5.49 -0.03) = Wendepunkt W(5.49 -0.03)
6.28	2	0.03	-8	Hochpunkt H(6.28 2)



b) I. Wir benötigen die erste positive Nullstelle der Funktion $f_t(x) = t \cos(tx)$ und erhalten:

$$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow t \cos(tx) = 0 \Leftrightarrow \cos(tx) = 0 \Leftrightarrow tx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2t},$$

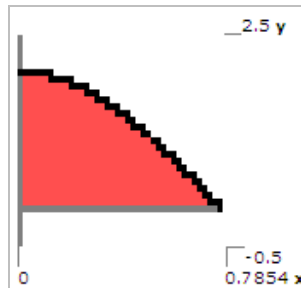
also: $N\left(\frac{\pi}{2t} | 0\right)$.

II. Wir berechnen mit Hilfe einer Stammfunktion die Fläche zwischen Kurve K_t und Achsen des Koordinatensystems im 1. Quadranten des Koordinatensystems wie folgt:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} f_t(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} t \cos(tx) dx = t \int_0^{\frac{\pi}{2t}} \cos(tx) dx = t \left[\frac{1}{t} \sin(tx) \right]_0^{\frac{\pi}{2t}} = \left[\sin(tx) \right]_0^{\frac{\pi}{2t}} = \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{2t}\right) - \sin(0) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Die Fläche A hat also unabhängig von t immer den Wert 1.



c) I. Es gilt für $t = \pi/2$: $f_{\pi/2}(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$. An der Stelle $x = 2/3$ lautet der Funktionswert:

$$f_{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Die Ableitung von $f_{\pi/2}(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ ist: $f'_{\pi/2}(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$, so dass:

$$f'_{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{8}$$

gilt.

II. Mit dem Ansatz $p(x) = a(x-b)^2$ berechnen wir die gesuchte Parabel 2. Grades und erhalten als Ableitung: $p'(x) = 2a(x-b)$ (nach der Kettenregel). Nun gilt:

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = f_{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow a\left(\frac{2}{3} - b\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$p'\left(\frac{2}{3}\right) = f'_{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2a\left(\frac{2}{3} - b\right) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{8} \quad (2).$$

Division der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt:

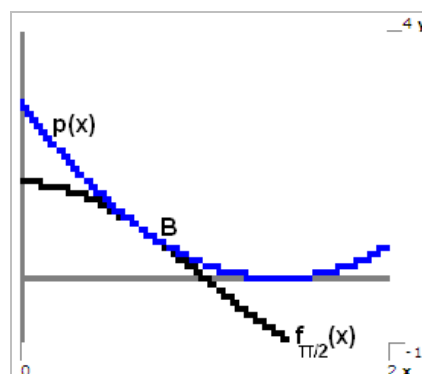
$$a\left(\frac{2}{3} - b\right)^2 \Big/ 2a\left(\frac{2}{3} - b\right) = \frac{\left(\frac{2}{3} - b\right)}{2} = \frac{\pi}{4} \Big/ -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{8} = -\frac{2}{\pi \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{3} - b = -\frac{4}{\pi \sqrt{3}} \Rightarrow -b = -\frac{4}{\pi \sqrt{3}} - \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$b = \frac{4}{\pi \sqrt{3}} + \frac{2}{3} = 1,4018$$

und weiter:

$$a\left(\frac{2}{3} - 1,4018\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0,5404a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = 1,4534.$$

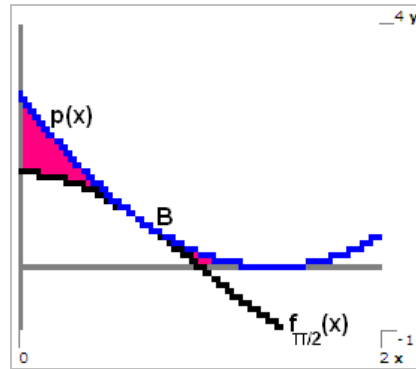
Die gesuchte Parabel lautet damit: $p(x) = 1,4534(x-1,4018)^2$ und berührt die Kosinusfunktion im Berührungspunkt $B\left(\frac{2}{3} \mid \frac{\pi}{4}\right)$.



d) Die Fläche A zwischen der Funktion $f_{\pi/2}(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ und der Parabel $p(x)$ im 1. Quadranten des Koordinatensystems errechnet sich wegen $f_{\pi/2}(x) \leq p(x)$ und wegen der Nullstellen $N_f(1|0)$ ($f_{\pi/2}(x)=0 \Rightarrow x=1$) und $N_p(1,4018|0)$ ($p(x)=0 \Rightarrow x=1,4018$) als:

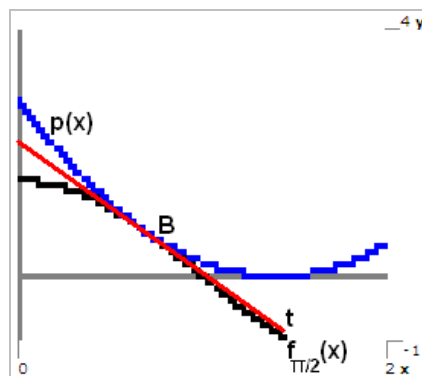
$$A = \int_0^{1,4018} p(x) dx - \int_0^1 f_{\pi/2}(x) dx = \int_0^{1,4018} 1,4534(x-1,4018)^2 dx - 1 = 1,3345 - 1 = 0,3345$$

auf Grund der oben bewiesenen Identität: $\int_0^{\frac{\pi}{2t}} f_t(x) dx = 1$.



e) I. Die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt $B\left(\frac{2}{3} \mid \frac{\pi}{4}\right)$ von Funktion $f_{\pi/2}(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ und Parabel $p(x) = 1,4534(x-1,4018)^2$ lautet:

$$t: y = f'_{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) + f_{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{4} = -2,1369x + 2,21.$$



II. Die Tangente zerteilt die Fläche A zwischen Kosinusfunktion und Parabel im 1. Quadranten in zwei Teilflächen. Wir berechnen die untere Teilfläche A_1 zwischen Kosinusfunktion und Tangente, indem wir zunächst die Achsenschnittpunkte der Tangente $y = -2,1369x + 2,21$ ermitteln:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2,21 \Rightarrow S_y(0|2,21)$$

$$y = 0 \Rightarrow -2,1369x + 2,21 = 0 \Rightarrow 2,21 = 2,1369x \Rightarrow x = 1,0332 \Rightarrow N(1,0332|0).$$

Das Dreieck, das die Tangente mit den Achsen des Koordinatensystems bildet, hat daher den Flächeninhalt:

$$A_{\Delta} = 0,5 \cdot 1,0332 \cdot 2,21 = 1,1417 \text{ FE. Wegen der Identität: } \int_0^{\frac{\pi}{2t}} f_t(x) dx = 1 \text{ folgt:}$$

$$A_1 = A_{\Delta} - 1 = 1,1417 - 1 = 0,1417 \text{ FE.}$$

III. Die zweite Teilfläche A_2 hat den Flächeninhalt:

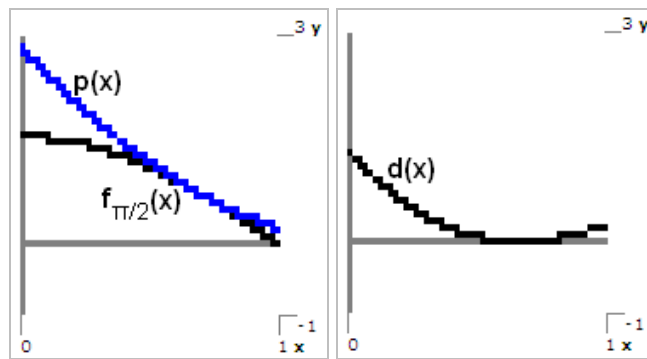
$$A_2 = A - A_1 = 0,3345 - 0,1417 = 0,1928 \text{ FE,}$$

so dass das Verhältnis der beiden Flächen $A_1:A_2 = 0,735$, also etwa 3:4 beträgt.

f) Extremwertaufgabe: Wir bestimmen das (globale) Maximum der Differenzfunktion

$$d(x) = p(x) - f_{\pi/2}(x) = 1,4534(x-1,4018)^2 - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

(wegen $f_{\pi/2}(x) \leq p(x)$) auf dem Intervall $[0; 1]$.



Die Differenzfunktion hat ein lokales Minimum an der Berührstelle $x = 2/3$ mit $d(2/3) = 0$, die y-Werte der Randstellen $x = 0$ bzw. $x = 1$ lauten: $d(0) = 1,2852$ und $d(1) = 0,2346$, so dass ein globales Maximum bei $x=0$ vorliegt mit maximaler Differenz 1,2852.

g) Es ist $t=2,5$. Wir legen eine Tangente von außerhalb, vom Punkt $P(4|0)$ aus an die Kosinusfunktion $f_{2,5}(x) = 2,5 \cos(2,5x)$ und haben den Ansatz gemäß der Tangentengleichung:

$$t: y = f'_{2,5}(u)(x-u) + f_{2,5}(u)$$

mit $P(5|0)$ ($x=5, y=0$) als:

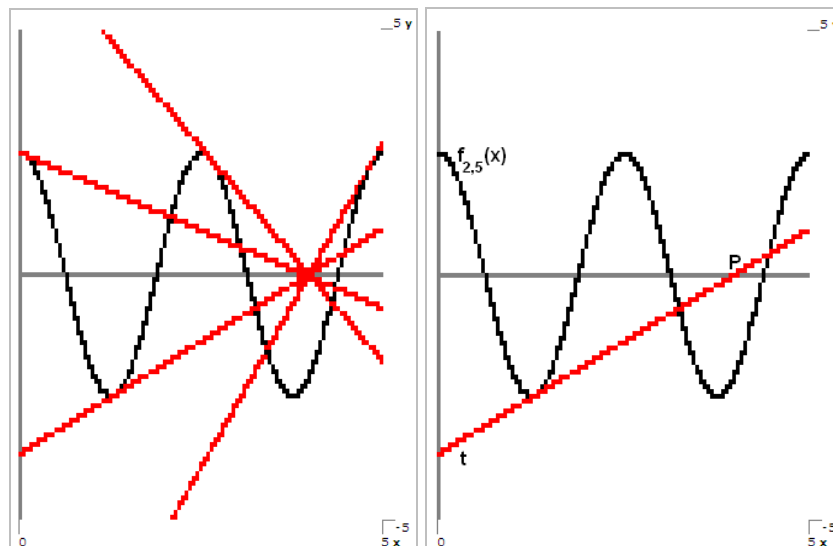
$$0 = f'_{2,5}(u)(4-u) + f_{2,5}(u) \quad (*)$$

Wir lösen Gleichung (*) nach u auf und haben: $u = 0,041, u = 1,316, u = 2,627, \dots$ Nur $u = 1,316$

liegt im vorgegebenen Intervall $[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}]$, so dass sich wegen $f_{2,5}(1,316) = -2,4725$ der Berührungspunkt

$B(1,316|-2,4715)$ ergibt. Im Berührungspunkt ergibt sich als Tangente, die durch den Punkt $P(4|0)$ verläuft:

$$t: y = 0,9241x - 3,6887.$$



h) Extremwertaufgabe: Für $t=1,5$ ergibt sich zunächst die Funktion: $f_{1,5}(x) = 1,5 \cos(1,5x)$. Punkte Q auf der Kosinusfunktion haben die Koordinaten: $Q(x|f_{1,5}(x))$. Der Abstand eines solchen Punktes Q zum Punkt $R(3|1)$ errechnet sich letztlich nach dem Satz des Pythagoras als:

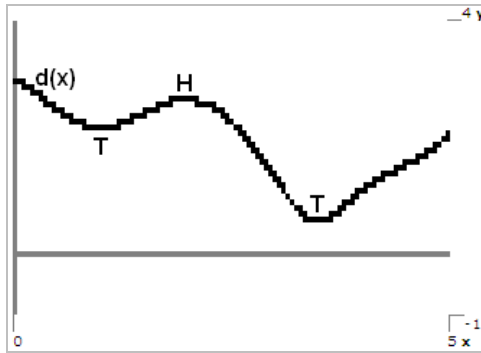
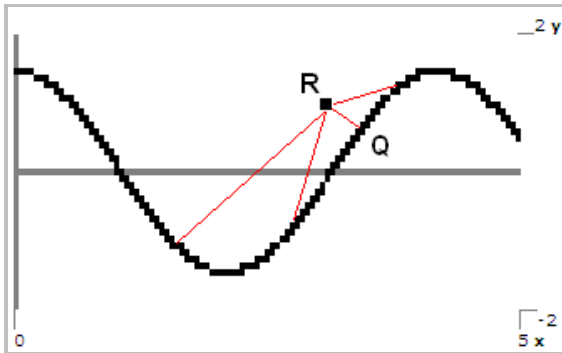
$$d(x) = d(Q,R) =$$

$$\sqrt{(x-x_R)^2 + (f_{1,5}(x)-y_R)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (f_{1,5}(x)-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (1,5 \cos(1,5x)-1)^2}.$$

Als Minimum der Abstandsfunktion können wir dann $x = 3,49$ mit $d(3,49) = 0,55$ feststellen. Der Kurvenpunkt Q mit minimalem Abstand zu R besitzt die Koordinaten: $Q(3,49|0,75)$ ($f_{1,5}(3,49) =$

0,75).

x	y = d(x)	d'(x)	d''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	3.0414	-0.99	-0.55	Schnittpunkt $S_y(0 3.04)$
0.335	2.6835	-1.12	0	Wendepunkt $W(0.34 2.68)$
0.995	2.1907	-0.01	2.86	Tiefpunkt $T(1 2.19)$
1.46	2.4229	0.78	0.04	Wendepunkt $W(1.46 2.42)$
1.97	2.6798	0	-2.62	Hochpunkt $H(1.97 2.68)$
2.99	1.3382	-2.2	-0.04	Wendepunkt $W(2.99 1.34)$
3.485	0.5508	-0.05	9.56	Tiefpunkt $T(3.49 0.55)$
3.805	0.8454	1.33	0.01	Wendepunkt $W(3.81 0.85)$
4.45	1.5006	0.75	-0.01	Wendepunkt $W(4.45 1.5)$



www.michael-buhlmann.de / 03.2016 / Aufgabe 196