Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_t(x) = t\cos(tx)$$

mit reellen Parameter t > 0. Die zugehörigen Schaubilder heißen K_t.

a) Skizziere die Schaubilder $K_{0,5}$, K_1 und K_2 jeweils auf dem Intervall [-π; 2π].

b) Zeige: Der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve K_t und den Achsen des Koordinatensystems im 1. Quadranten ist unabhängig von t.

c) Es sei t = π/2. Konstruiere an die Kurve $K_{\pi/2}$ eine Parabel 2. Grades der Form $p(x) = a(x–b)^2$, die die Kosinuskurve an der Stelle x = 2/3 berührt.

d) Berechne die Fläche zwischen der Parabel p(x) und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

e) Die gemeinsame Tangente zwischen der Parabel p(x) und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im Berührpunkt zwischen Parabel und Kosinusfunktion teilt die Fläche zwischen der Parabel p(x) und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im 1. Quadranten des Koordinatensystems. Berechne eine Teilfläche und das Verhältnis der beiden Flächeninhalte zueinander.

f) Bestimme die maximale Abweichung zwischen der Parabel p(x) und der Funktion $f_{\pi/2}(x)$ im Intervall [0; 1].

g) Es sei t = 2,5. Wie lautet die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt P(4|0) verläuft und die Kurve $K_{2,5}$ im Intervall $[\frac{\pi}{5};\frac{3\pi}{5}]$ berührt?

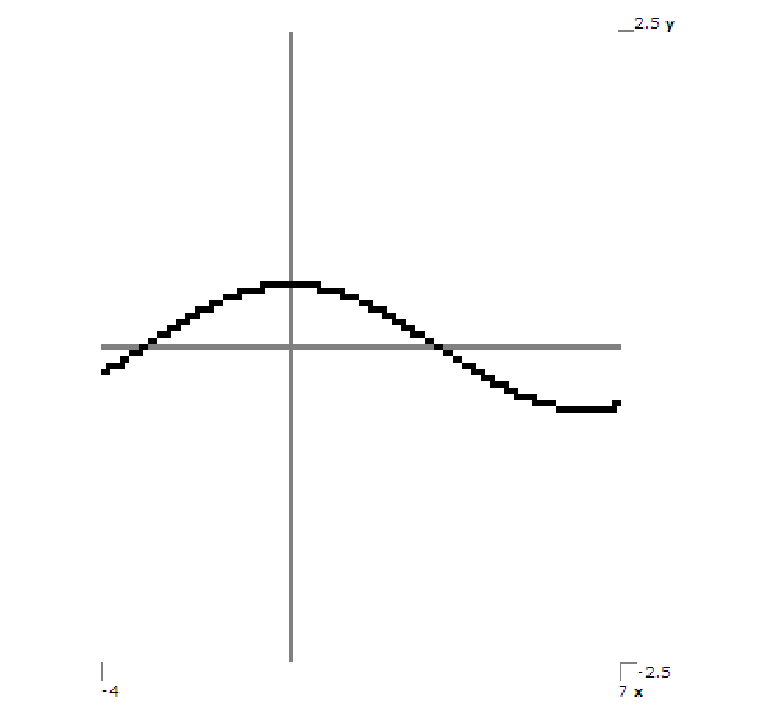
h) Es sei t = 1,5. Welcher Punkt auf der Kurve $K_{1,5}$ hat den kleinsten Abstand zum Punkt R(3|1)?

Lösung: a) Wertetabelle und Graph ergeben jeweils:

t=0,5: $f_{0,5}(x) = 0,5\cos(0,5x)$

Wertetabelle:				
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-3.15	-0.0021	0.25	0	Nullstelle N(-3.15|0) = Wendepunkt W(-3.15|0)
0	0.5	0	-0.12	Schnittpunkt S_y(0|0.5) = Hochpunkt H(0|0.5)
3.14	0.0004	-0.25	0	Nullstelle N(3.14|0) = Wendepunkt W(3.14|0)
6.28	-0.5	0	0.12	Tiefpunkt T(6.28|-0.5)

Graph:

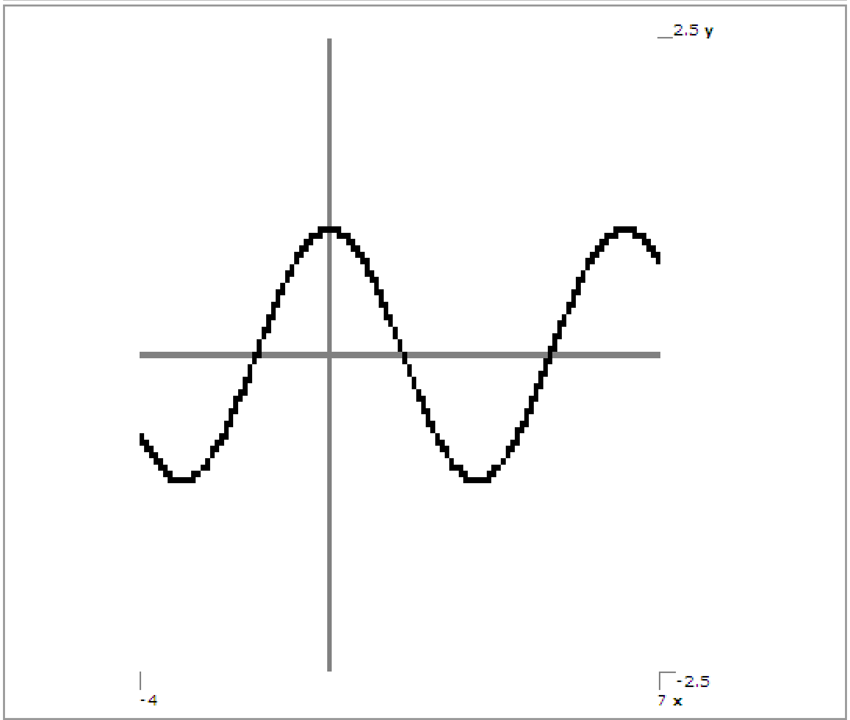


t=1: $f_1(x) = \cos(x)$

Wertetabelle:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.15	-1	-0.01	1	Tiefpunkt T(-3.15|-1)
-1.58	-0.0092	1	0.01	Nullstelle N(-1.58|-0.01) = Wendepunkt W(-1.58|-0.01)
0	1	0	-1	Schnittpunkt S_y(0|1) = Hochpunkt H(0|1)
1.57	0.0008	-1	0	Nullstelle N(1.57|0) = Wendepunkt W(1.57|0)
3.14	-1	0	1	Tiefpunkt T(3.14|-1)
4.71	-0.0024	1	0	Nullstelle N(4.71|0) = Wendepunkt W(4.71|0)
6.28	1	0	-1	Hochpunkt H(6.28|1)

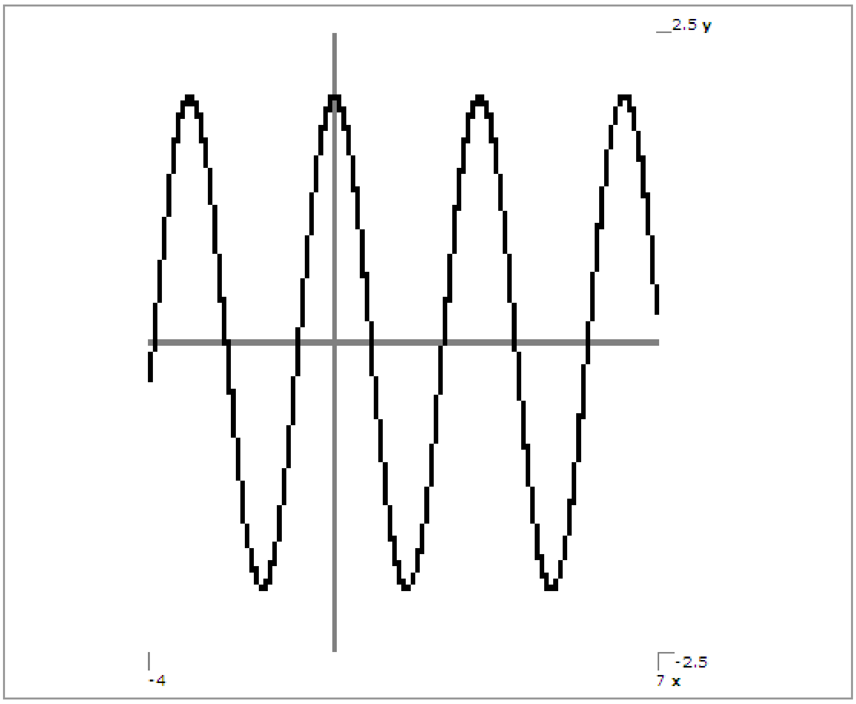
Graph:



t=2: $f_2(x) = 2\cos(2x)$

Wertetabelle:				
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-3.93	-0.012	4	0.05	Nullstelle N(-3.93|-0.01) = Wendepunkt W(-3.93|-0.01)
-3.15	1.9997	0.07	-8	Hochpunkt H(-3.15|2)
-2.36	0.0152	-4	-0.06	Nullstelle N(-2.36|0.02) = Wendepunkt W(-2.36|0.02)
-1.58	-1.9997	-0.07	8	Tiefpunkt T(-1.58|-2)
-0.79	-0.0184	4	0.07	Nullstelle N(-0.79|-0.02) = Wendepunkt W(-0.79|-0.02)
0	2	0	-8	Schnittpunkt S_y(0|2) = Hochpunkt H(0|2)
0.78	0.0216	-4	-0.09	Nullstelle N(0.78|0.02) = Wendepunkt W(0.78|0.02)
1.57	-2	-0.01	8	Tiefpunkt T(1.57|-2)
2.35	-0.0248	4	0.1	Nullstelle N(2.35|-0.02) = Wendepunkt W(2.35|-0.02)
3.14	2	0.01	-8	Hochpunkt H(3.14|2)
3.92	0.028	-4	-0.11	Nullstelle N(3.92|0.03) = Wendepunkt W(3.92|0.03)
4.71	-2	-0.02	8	Tiefpunkt T(4.71|-2)
5.49	-0.0311	4	0.12	Nullstelle N(5.49|-0.03) = Wendepunkt W(5.49|-0.03)
6.28	2	0.03	-8	Hochpunkt H(6.28|2)

Graph:



b) I. Wir benötigen die erste positive Nullstelle der Funktion $f_t(x) = t\cos(tx)$ und erhalten:

$$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow t\cos(tx) = 0 \Leftrightarrow \cos(tx) = 0 \Leftrightarrow tx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2t},$$

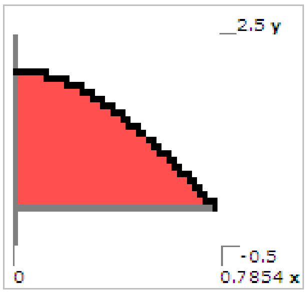
also: N($\frac{\pi}{2t}$|0).

II. Wir berechnen mit Hilfe einer Stammfunktion die Fläche zwischen Kurve K_t und Achsen des Koordinatensystems im 1. Quadranten des Koordinatensystems wie folgt:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} f_t(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} t\cos(tx)dx = t\int_0^{\frac{\pi}{2t}} \cos(tx)dx = t\left[\frac{1}{t}\sin(tx)\right]_o^{\frac{\pi}{2t}} = [\sin(tx)]_o^{\frac{\pi}{2t}} = \sin(t\cdot\frac{\pi}{2t}) - \sin(0) =$$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Die Fläche A hat also unabhängig von t immer den Wert 1.



c) I. Es gilt für t = π/2: $f_{\pi/2}(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$. An der Stelle x = 2/3 lautet der Funktionswert:

$$f_{\pi/2}(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Die Ableitung von $f_{\pi/2}(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$ ist: $f'_{\pi/2}(x) = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)$, so dass:

$$f'_{\pi/2}(\frac{2}{3}) = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}) = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8}$$

gilt.

II. Mit dem Ansatz $p(x) = a(x–b)^2$ berechnen wir die gesuchte Parabel 2. Grades und erhalten als Ableitung: p'(x) = 2a(x–b) (nach der Kettenregel). Nun gilt:

$$p(\frac{2}{3}) = f_{\pi/2}(\frac{2}{3}) \Rightarrow a(\frac{2}{3}-b)^2 = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$p'(\frac{2}{3}) = f'_{\pi/2}(\frac{2}{3}) \Rightarrow 2a(\frac{2}{3}-b) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8} \quad (2).$$

Division der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt:

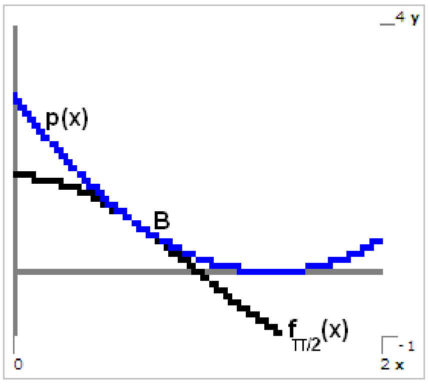
$$a(\frac{2}{3}-b)^2 \Big/ 2a(\frac{2}{3}-b) = \frac{(\frac{2}{3}-b)}{2} = \frac{\pi}{4} \Big/ -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8} = -\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{3}-b = -\frac{4}{\pi\sqrt{3}} \Rightarrow -b = -\frac{4}{\pi\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$b = \frac{4}{\pi\sqrt{3}} + \frac{2}{3} = 1{,}4018$$

und weiter:

$$a(\frac{2}{3}-1{,}4018)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0{,}5404a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = 1{,}4534.$$

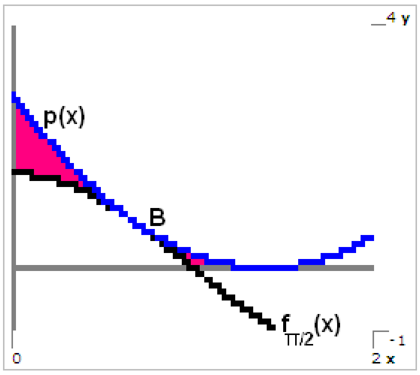
Die gesuchte Parabel lautet damit: $p(x) = 1{,}4534(x–1{,}4018)^2$ und berührt die Kosinusfunktion im Berührpunkt $B(\frac{2}{3}|\frac{\pi}{4})$.



d) Die Fläche A zwischen der Funktion $f_{\pi/2}(x)=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$ und der Parabel p(x) im 1. Quadranten des Koordinatensystems errechnet sich wegen $f_{\pi/2}(x) \le p(x)$ und wegen der Nullstellen $N_f(1|0)$ ($f_{\pi/2}(x) = 0$ => x = 1) und $N_p(1{,}4018|0)$ (p(x) = 0 => x = 1,4018) als:

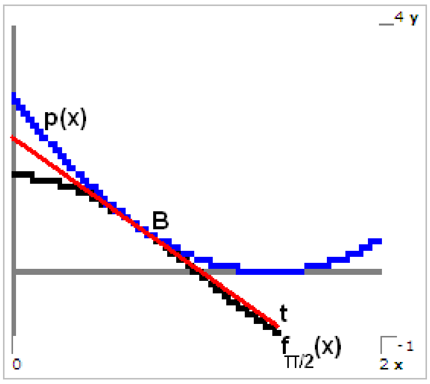
$$A=\int_0^{1{,}4018} p(x)dx-\int_0^1 f_{\pi/2}(x)dx=\int_0^{1{,}4018} 1{,}4534(x-1{,}4018)^2 dx-1=1{,}3345-1=0{,}3345$$

auf Grund der oben bewiesenen Identität: $\int_0^{\frac{\pi}{2t}} f_t(x)dx=1$.



e) I. Die gemeinsame Tangente im Berührpunkt B($\frac{2}{3}|\frac{\pi}{4}$) von Funktion $f_{\pi/2}(x)=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$ und Parabel $p(x) = 1{,}4534(x-1{,}4018)^2$ lautet:

t: $y=f'_{\pi/2}(\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})+f_{\pi/2}(\frac{2}{3})=-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8}(x-\frac{2}{3})+\frac{\pi}{4}=-2{,}1369x+2{,}21$.



II. Die Tangente zerteilt die Fläche A zwischen Kosinusfunktion und Parabel im 1. Quadranten in zwei Teilflächen. Wir berechnen die untere Teilfläche A_1 zwischen Kosinusfunktion und Tangente, indem wir zunächst die Achsenschnittpunkte der Tangente y = -2,1369x+2,21 ermitteln:

x = 0 => y = 2,21 => $S_y(0|2{,}21)$

y = 0 => -2,1369x+2,21 = 0 => 2,21 = 2,1369x => x = 1,0332 => N(1,0332|0).

Das Dreieck, das die Tangente mit den Achsen des Koordinatensystems bildet, hat daher den Flächeninhalt: $A_\Delta = 0{,}5\cdot1{,}0332\cdot2{,}21 = 1{,}1417$ FE. Wegen der Identität: $\int_0^{\frac{\pi}{2t}} f_t(x)dx=1$ folgt:

$A_1 = A_\Delta - 1 = 1{,}1417 - 1 = 0{,}1417$ FE.

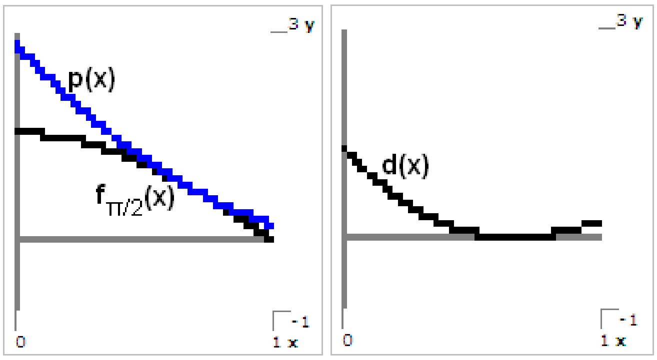
III. Die zweite Teilfläche A_2 hat den Flächeninhalt:

$A_2 = A - A_1 = 0{,}3345 - 0{,}1417 = 0{,}1928$ FE,

so dass das Verhältnis der beiden Flächen $A_1:A_2 = 0{,}735$, also etwa 3:4 beträgt.

f) Extremwertaufgabe: Wir bestimmen das (globale) Maximum der Differenzfunktion d(x) = p(x) – $f_{\pi/2}$(x) = $1{,}4534(x–1{,}4018)^2 – \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

(wegen $f_{\pi/2}(x) \le p(x)$) auf dem Intervall [0; 1].



Die Differenzfunktion hat ein lokales Minimum an der Berührstelle x = 2/3 mit d(2/3) = 0, die y-Werte der Randstellen x = 0 bzw. x = 1 lauten: d(0) = 1,2852 und d(1) = 0,2346, so dass ein globales Maximum bei x=0 vorliegt mit maximaler Differenz 1,2852.

g) Es ist t=2,5. Wir legen eine <u>Tangente von außerhalb</u>, vom Punkt P(4|0) aus an die Kosinusfunktion $f_{2,5}(x) = 2{,}5\cos(2{,}5x)$ und haben den Ansatz gemäß der Tangentengleichung:

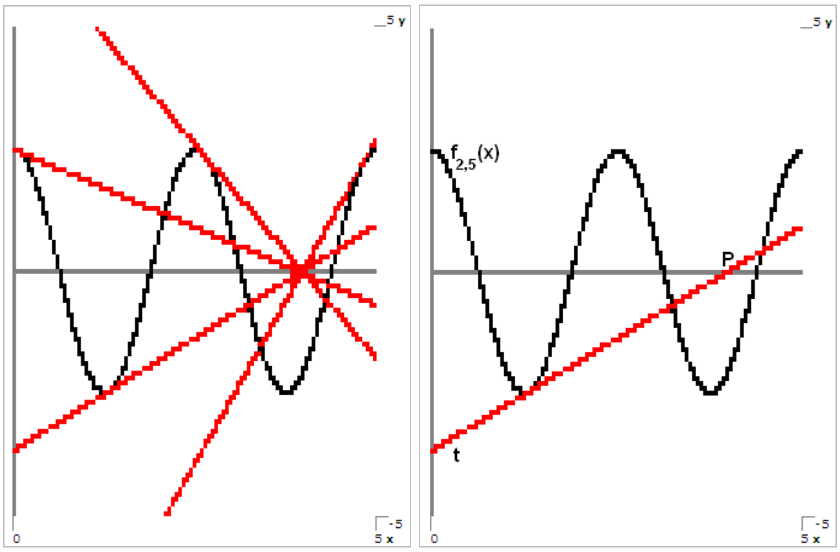
t: $y = f_{2,5}'(u)(x-u) + f_{2,5}(u)$

mit P(5|0) (x=5, y=0) als:

$0 = f_{2,5}'(u)(4-u) + f_{2,5}(u)$ (*).

Wir lösen Gleichung (*) nach u auf und haben: u = 0,041, u = 1,316, u = 2,627, … Nur u = 1,316 liegt im vorgebebenen Intervall $[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}]$, so dass sich wegen $f_{2,5}(1{,}316) = -2{,}4725$ der Berührpunkt B(1,316|-2,4715) ergibt. Im Berührpunkt ergibt sich als Tangente, die durch den Punkt P(4|0) verläuft:

t: y = 0,9241x – 3,6887.



h) <u>Extremwertaufgabe</u>: Für t=1,5 ergibt sich zunächst die Funktion: $f_{1,5}(x) = 1{,}5\cos(1{,}5x)$. Punkte Q auf der Kosinusfunktion haben die Koordinaten: $Q(x|f_{1,5}(x))$. Der Abstand eines solchen Punktes Q zum Punkt R(3|1) errechnet sich letztlich nach dem Satz des Pythagoras als:

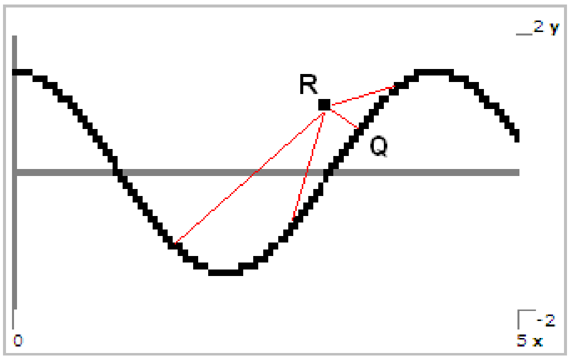
d(x) = d(Q,R) =

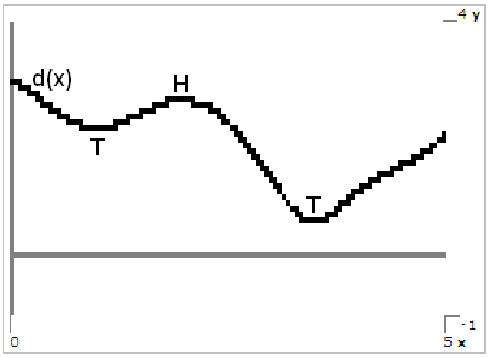
$$\sqrt{(x-x_R)^2 + (f_{1,5}(x)-y_R)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (f_{1,5}(x)-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (1{,}5\cos(1{,}5x)-1)^2}.$$

Als Minimum der Abstandsfunktion können wir dann x = 3,49 mit d(3,49) = 0,55 feststellen. Der Kurvenpunkt Q mit minimalem Abstand zu R besitzt die Koordinaten: Q(3,49|0,75) ($f_{1,5}(3{,}49)$ =

0,75).

x	y = d(x)	d'(x)	d''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	3.0414	-0.99	-0.55	Schnittpunkt S_y(0|3.04)
0.335	2.6835	-1.12	0	Wendepunkt W(0.34|2.68)
0.995	2.1907	-0.01	2.86	Tiefpunkt T(1|2.19)
1.46	2.4229	0.78	0.04	Wendepunkt W(1.46|2.42)
1.97	2.6798	0	-2.62	Hochpunkt H(1.97|2.68)
2.99	1.3382	-2.2	-0.04	Wendepunkt W(2.99|1.34)
3.485	0.5508	-0.05	9.56	Tiefpunkt T(3.49|0.55)
3.805	0.8454	1.33	0.01	Wendepunkt W(3.81|0.85)
4.45	1.5006	0.75	-0.01	Wendepunkt W(4.45|1.5)





www.michael-buhlmann.de / 03.2016 / Aufgabe 196