Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Für die Funktionenschar der nach oben geöffneten Normalparabeln:

$$f_t(x) = x^2 - tx$$

mit reellem Parameter t ist die Ortskurve der Tiefpunkte zu bestimmen.

Lösung: I. Allgemein gilt: Funktionenscharen (Funktionen mit Parametern, Parameterfunktionen) entstehen, wenn Funktionsgleichungen zur Funktionsvariablen x zusätzlich reelle Parameter t enthalten, wenn also: $f_t(x) = f(x, t)$ mit einer beliebigen, aber festen Zahl t gilt. Die Kurven $f_t(x)$ mit den vorgegebenen reellen t stellen die Funktionenschar grafisch dar, etwa als „Funktionenbüschel" oder als Schar zueinander paralleler Funktionen (z.B. bei Stammfunktionen). Funktionenscharen entstehen auch durch Verschiebung und/oder Streckung von Funktionen ($f_t(x) = f(x+t)$, $f_t(x) = t\cdot f(x)$ usw.). Für Parameterfunktionen gelten alle mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Differential- und Integralrechnung (Parameter als additive Konstante, konstanter Faktor u.a.). Daher entsteht die Ortskurve als Kurve von besonderen Punkten P(x(t)|y(t)) der Funktionenschar $f_t(x)$ (Hoch-, Tief-, Wendepunkte) mittels Bestimmung dieser Kurvenpunkte für jedes $f_t(x)$ und der Elimination des Parameters t, so dass aus: x=x(t), y=y(t) die Ortskurve y=o(x) entsteht.

II. Wir ermitteln zunächst für jede Funktion $f_t(x)$ der Funktionenschar den Tiefpunkt. Dazu bilden wir die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f_t(x) = x^2 - tx$ und erhalten gemäß Potenz- uns Summenregel:

$f_t'(x) = 2x - t$

$f_t''(x) = 2$.

Die x-Koordinate des Tiefpunkts ergibt sich durch Nullsetzen der 1. Ableitung als:

$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-t = 0 \Leftrightarrow 2x = t \Leftrightarrow x = t/2$.

Wegen $f_t''(t/2) = 2 > 0$ liegt an der Stelle x = t/2 in der Tat ein Tiefpunkt vor. Einsetzen der x-Koordinate in $f_t(x) = x^2 - tx$ ergibt:

$f_t(t/2) = (t/2)^2 - t\cdot t/2 = t^2/4 - t^2/2 = -t^2/4$,

so dass für jedes reelle t der Tiefpunkt $T(t/2|-t^2/4)$ vorliegt.

III. Die Ortskurve aus all diesen Tiefpunkten $T(t/2|-t^2/4)$, t reell, errechnet sich durch Gleichsetzen der x-Koordinate des Tiefpunkts mit x, der y-Koordinate mit y; also:

$x = -t/2$, $y = -t^2/4$.

Wir stellen die Gleichung x = -t/2 nach t um:

$x = -t/2 \Leftrightarrow 2x = -t \Leftrightarrow t = -2x$

und ersetzen in der Gleichung $y = -t^2/4$ die Variable t durch den x-Term t = -2x:

$y = -t^2/4 = -(-2x)^2/4 = -4x^2/4 = -x^2$,

so dass wir eine direkte Beziehung zwischen x und y erhalten. Die Ortskurve der Tiefpunkte aller Funktionen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx$ lautet damit:

$y = -x^2$,

d.h.: alle Tiefpunkte liegen auf der nach unten geöffneten Normalparabel mit dem Koordinatenursprung als Scheitelpunkt. Wir bezeichnen die Ortskurve auch als:

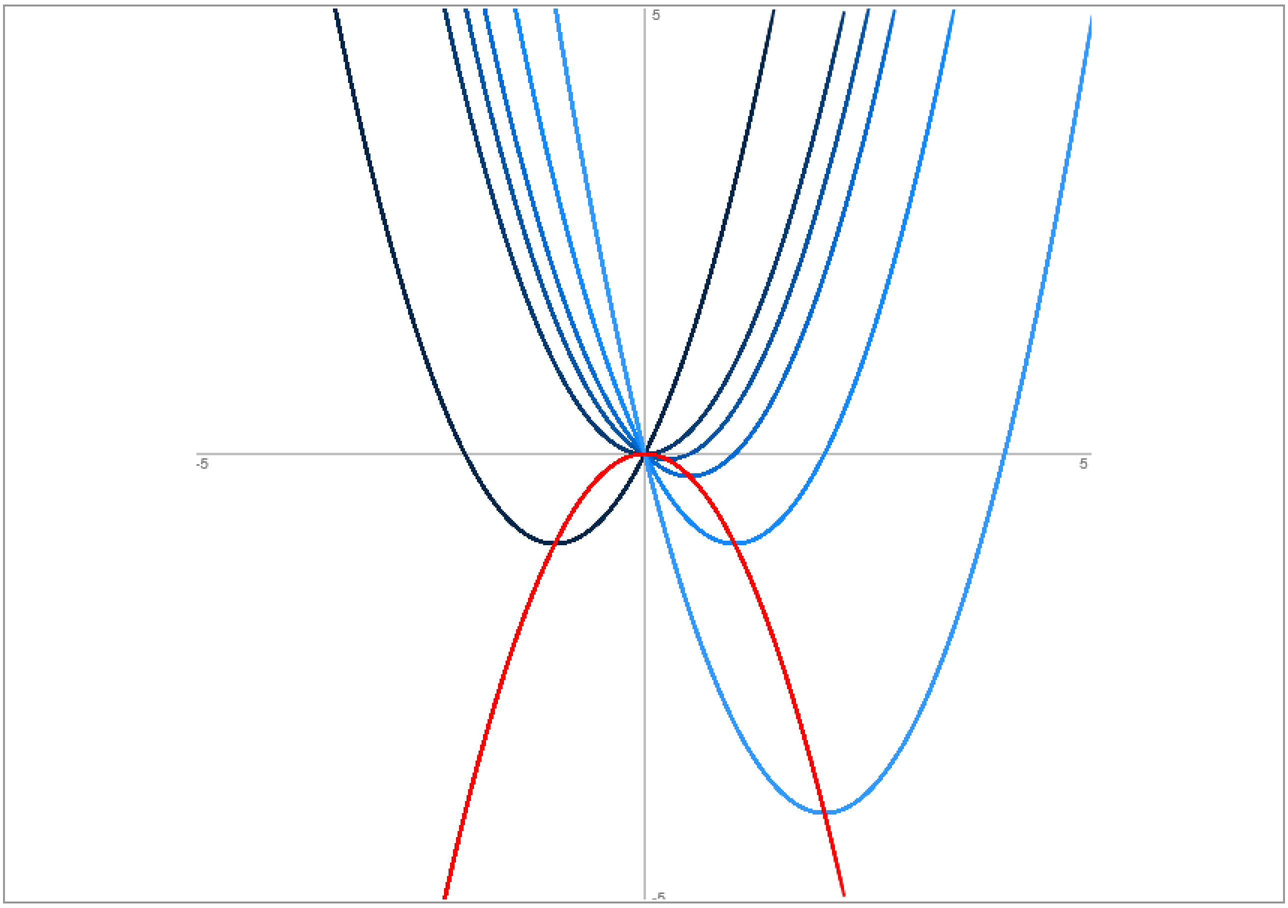
$o(x) = -x^2$.

IV. Funktionenschar (für t = -2, 0, 0,5, 1, 2, 4) und Ortskurve der Tiefpunkte sind nachfolgend erfasst in der Wertetabelle und als Graphen:

Wertetabelle:

x	$f_{-2}(x)$	$f_0(x)$	$f_{0.5}(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_4(x)$	Ortskurve $y = -x^2$ der Tiefpunkte
-5	15	25	27.5	30	35	45	-25
-4.5	11.25	20.25	22.5	24.75	29.25	38.25	-20.25
-4	8	16	18	20	24	32	-16
-3.5	5.25	12.25	14	15.75	19.25	26.25	-12.25
-3	3	9	10.5	12	15	21	-9
-2.5	1.25	6.25	7.5	8.75	11.25	16.25	-6.25
-2	0	4	5	6	8	12	-4
-1.5	-0.75	2.25	3	3.75	5.25	8.25	-2.25
-1	-1	1	1.5	2	3	5	-1
-0.5	-0.75	0.25	0.5	0.75	1.25	2.25	-0.25
0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	1.25	0.25	0	-0.25	-0.75	-1.75	-0.25
1	3	1	0.5	0	-1	-3	-1
1.5	5.25	2.25	1.5	0.75	-0.75	-3.75	-2.25
2	8	4	3	2	0	-4	-4
2.5	11.25	6.25	5	3.75	1.25	-3.75	-6.25
3	15	9	7.5	6	3	-3	-9
3.5	19.25	12.25	10.5	8.75	5.25	-1.75	-12.25
4	24	16	14	12	8	0	-16
4.5	29.25	20.25	18	15.75	11.25	2.25	-20.25
5	35	25	22.5	20	15	5	-25

Graphen:



www.michael-buhlmann.de / 04.2018 / Aufgabe 553