Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Für die Funktionenschar der ganz rationalen Funktionen 3. Grades:

$$f_t(x) = x^3 – (2t+1)x^2 + (2t–20)x + 40t$$

mit reellem Parameter t sind die gemeinsamen Schnittpunkte aller Parameterfunktionen zu bestimmen.

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Funktionenscharen (Funktionen mit Parametern, Parameterfunktionen) entstehen, wenn Funktionsgleichungen zur Funktionsvariablen x zusätzlich reelle Parameter t enthalten, wenn also: $f_t(x) = f(x, t)$ mit einer beliebigen, aber festen Zahl t gilt. Die Kurven $f_t(x)$ mit den vorgegebenen reellen t stellen die Funktionenschar grafisch dar, etwa als „Funktionenbüschel" oder als Schar zueinander paralleler Funktionen (z.B. bei Stammfunktionen). Funktionenscharen entstehen auch durch Verschiebung und/oder Streckung von Funktionen ($f_t(x) = f(x+t)$, $f_t(x) = t\cdot f(x)$ usw.). Für Parameterfunktionen gelten alle mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Differential- und Integralrechnung.
Es kommt daher auch vor, dass sich alle Parameterfunktionen $f_t(x)$ in gemeinsamen (Schnitt-) Punkten $S(x_0|y_0)$ schneiden, so dass gilt: $y_0 = f_t(x_0)$ für alle Parameter t der Funktionenschar. Zum Nachweis eines Schnittpunktes S ist dabei der Schnittpunkt durch Gleichsetzen von zwei speziellen Parameterfunktionen zu ermitteln, also bei t = a und t = b, a≠b, die Gleichung:

$$f_a(x) = f_b(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen. Ist $x = x_0$ eine Lösung der Gleichung (*), so lässt sich mit $y_0 = f_a(x_0) = f_b(x_0)$ der dazugehörige Schnittpunkt $S(x_0|y_0)$ errechnen. In einem weiteren Schritt wird festgestellt, ob der Punkt S auf allen Parameterfunktionen liegt. Die dazu notwendige Punktprobe, das Einsetzen von x_0 in $f_t(x)$, muss für alle Parameter t der Funktionenschar die von t unabhängige Zahl y_0 ergeben:

$$f_t(x_0) = y_0 \quad (**)$$

Ist dies der Fall, gelten also die Gleichungen (*) und (**), so ist der Schnittpunkt S der gemeinsame Punkt aller Parameterfunktionen $f_t(x)$ der Funktionenschar.

II. Zur Berechnung der Schnittpunkte der Funktionenschar wählen wir t = 0 und t = 1, so dass sich aus der Funktionenschar die die besonderen Funktionen:

$f_0(x) = x^3 – (2\cdot0+1)x^2 + (2\cdot0–20)x + 40\cdot0 = x^3 – x^2 – 20x$
$f_1(x) = x^3 – (2\cdot1+1)x^2 + (2\cdot1–20)x + 40\cdot1 = x^3 – 3x^2 – 18x + 40$

ergeben. Gleichsetzen der Funktionen führt auf die (quadratische) Gleichung mit den Gleichungsumformungen:

$f_0(x) = f_1(x)$
$x^3 – x^2 – 20x = x^3 – 3x^2 – 18x + 40$ | $-x^3$
$-x^2 – 20x = -3x^2 – 18x + 40$ | $+3x^2$
$2x^2 – 20x = -18x + 40$ | $+ 18x$
$2x^2 – 2x = 40$ | -40
$2x^2 – 2x – 40 = 0$ | $:2$
$x^2 – x – 20 = 0$ (abc-Formel: a = 1, b = -1, c = -20)

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1} = \frac{1\pm\sqrt{81}}{2} = \frac{1\pm9}{2}$$

$x_1 = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$, $x_2 = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Es ergeben sich als Schnittpunkte der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$ wegen:

$f_0(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 - 20\cdot(-4) = 0 = f_1(-4)$
$f_0(5) = 5^3 - 5^2 - 20\cdot 5 = 0 = f_1(5)$

die Punkte $S_1(-4|0)$, $S_2(5|0)$, die gleichzeitig Nullstellen der Funktionen sind.

III. Wir zeigen durch Punktprobe, dass die Punkte $S_1(-4|0)$, $S_2(5|0)$ auf den Kurven aller Funktionen $f_t(x)$ liegen, mithin gemeinsame Schnittpunkte der Funktionenschar sind. Dazu setzen wir $x_1 = -4$ in den allgemeinen Funktionsterm $f_t(x)$ ein und erhalten:

$f_t(x_1) = f_t(-4) = (-4)^3 - (2t+1)\cdot(-4)^2 + (2t-20)\cdot(-4) + 40t = -64 - 16(2t+1) - 4(2t-20) + 40t =$
$-64 - 32t - 16 - 8t + 80 + 40t = -80 - 40t + 80 + 40t = 0 = y_1$,

so dass $S_1(-4|0)$ als gemeinsamer Schnittpunkt erkannt ist. Analog gilt:

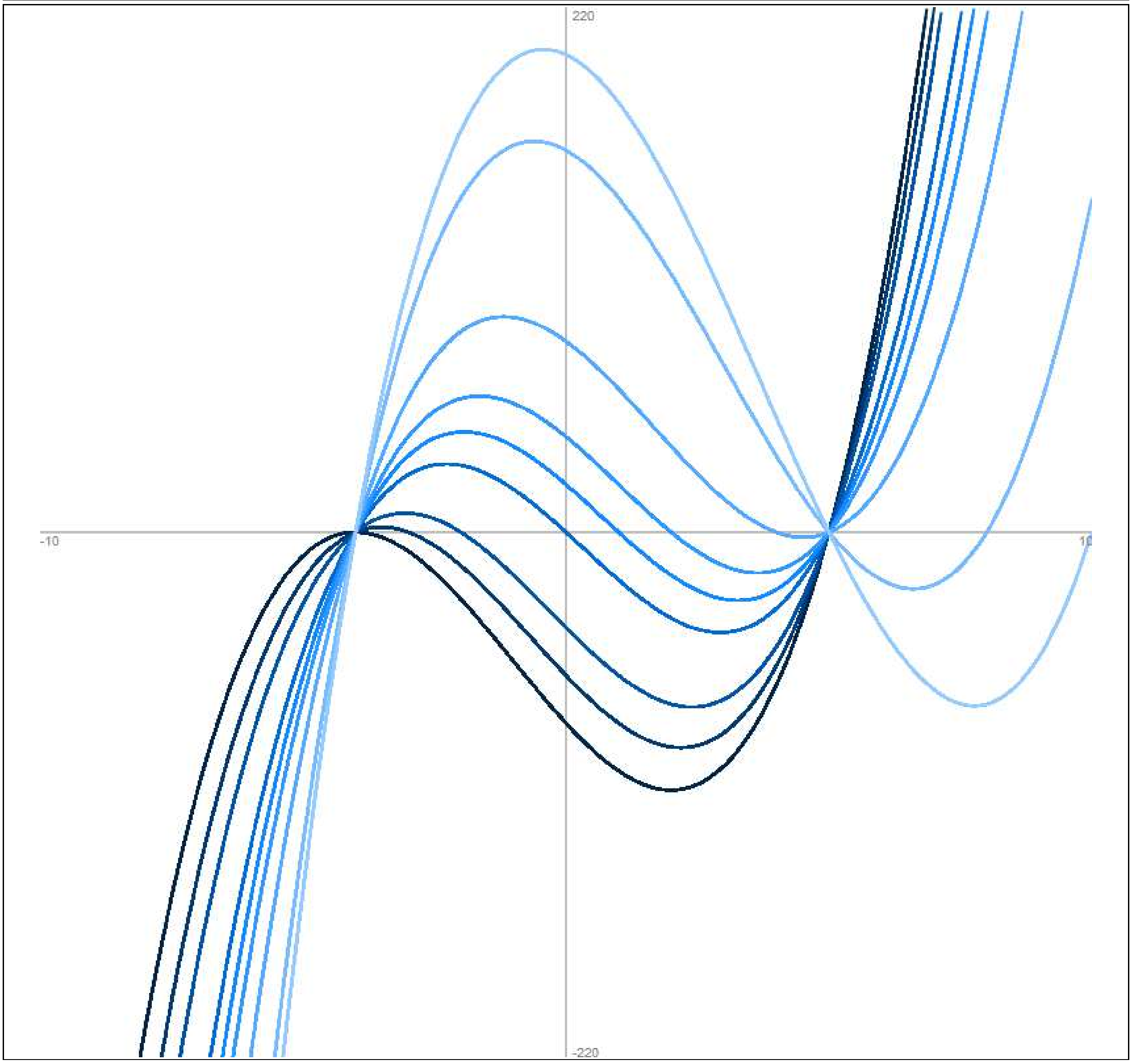
$f_t(x_2) = f_t(5) = 5^3 - (2t+1)\cdot 5^2 + (2t-20)\cdot 5 + 40t = 125 - 25(2t+1) + 5(2t-20) + 40t =$
$125 - 50t - 25 + 10t - 100 + 40t = 125 - 40t - 125 + 40t = 0 = y_2$

mit $S_2(5|0)$ als gemeinsamem Schnittpunkt der Funktionenschar. Alle Funktionen $f_t(x)$ schneiden sich mithin in den Schnittpunkten: $S_1(-4|0)$, $S_2(5|0)$.

IV. Die Funktionenschar (für t = -2, -1,5, -1, 0, 0,5, 1, 2, 4, 5) ist nachfolgend erfasst in der Wertetabelle und als Graphen:

Wertetabelle:									
x	**$f_{-2}(x)$**	**$f_{-1.5}(x)$**	**$f_{-1}(x)$**	**$f_0(x)$**	**$f_{0.5}(x)$**	**$f_1(x)$**	**$f_2(x)$**	**$f_4(x)$**	**$f_5(x)$**
-10	-540	-630	-720	-900	-990	-1080	-1260	-1620	-1800
-9.5	-438.625	-518.375	-598.125	-757.625	-837.375	-917.125	-1076.625	-1395.625	-1555.125
-9	-350	-420	-490	-630	-700	-770	-910	-1190	-1330
-8.5	-273.375	-334.125	-394.875	-516.375	-577.125	-637.875	-759.375	-1002.375	-1123.875
-8	-208	-260	-312	-416	-468	-520	-624	-832	-936
-7.5	-153.125	-196.875	-240.625	-328.125	-371.875	-415.625	-503.125	-678.125	-765.625
-7	-108	-144	-180	-252	-288	-324	-396	-540	-612
-6.5	-71.875	-100.625	-129.375	-186.875	-215.625	-244.375	-301.875	-416.875	-474.375
-6	-44	-66	-88	-132	-154	-176	-220	-308	-352
-5.5	-23.625	-39.375	-55.125	-86.625	-102.375	-118.125	-149.625	-212.625	-244.125
-5	-10	-20	-30	-50	-60	-70	-90	-130	-150
-4.5	-2.375	-7.125	-11.875	-21.375	-26.125	-30.875	-40.375	-59.375	-68.875
-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3.5	-2.125	2.125	6.375	14.875	19.125	23.375	31.875	48.875	57.375
-3	-8	0	8	24	32	40	56	88	104
-2.5	-16.875	-5.625	5.625	28.125	39.375	50.625	73.125	118.125	140.625
-2	-28	-14	0	28	42	56	84	140	168
-1.5	-40.625	-24.375	-8.125	24.375	40.625	56.875	89.375	154.375	186.875
-1	-54	-36	-18	18	36	54	90	162	198
-0.5	-67.375	-48.125	-28.875	9.625	28.875	48.125	86.625	163.625	202.125
0	-80	-60	-40	0	20	40	80	160	200
0.5	-91.125	-70.875	-50.625	-10.125	10.125	30.375	70.875	151.875	192.375
1	-100	-80	-60	-20	0	20	60	140	180
1.5	-105.875	-86.625	-67.375	-28.875	-9.625	9.625	48.125	125.125	163.625
2	-108	-90	-72	-36	-18	0	36	108	144
2.5	-105.625	-89.375	-73.125	-40.625	-24.375	-8.125	24.375	89.375	121.875
3	-98	-84	-70	-42	-28	-14	14	70	98
3.5	-84.375	-73.125	-61.875	-39.375	-28.125	-16.875	5.625	50.625	73.125
4	-64	-56	-48	-32	-24	-16	0	32	48
4.5	-36.125	-31.875	-27.625	-19.125	-14.875	-10.625	-2.125	14.875	23.375
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.5	45.125	40.375	35.625	26.125	21.375	16.625	7.125	-11.875	-21.375
6	100	90	80	60	50	40	20	-20	-40

6.5	165.375	149.625	133.875	102.375	86.625	70.875	39.375	-23.625	-55.125
7	242	220	198	154	132	110	66	-22	-66
7.5	330.625	301.875	273.125	215.625	186.875	158.125	100.625	-14.375	-71.875
8	432	396	360	288	252	216	144	0	-72
8.5	546.875	503.125	459.375	371.875	328.125	284.375	196.875	21.875	-65.625
9	676	624	572	468	416	364	260	52	-52
9.5	820.125	759.375	698.625	577.125	516.375	455.625	334.125	91.125	-30.375
10	980	910	840	700	630	560	420	140	0
Graphen:									



2. Lösung: I. Allgemein gilt: Funktionenscharen (Funktionen mit Parametern, Parameterfunktionen) entstehen, wenn Funktionsgleichungen zur Funktionsvariablen x zusätzlich reelle Parameter t enthalten, wenn also: $f_t(x) = f(x, t)$ mit einer beliebigen, aber festen Zahl t gilt. Die Kurven $f_t(x)$ mit den vorgegebenen reellen t stellen die Funktionenschar grafisch dar, etwa als „Funktionenbüschel“ oder als Schar zueinander paralleler Funktionen (z.B. bei Stammfunktionen). Funktionenscharen entstehen auch durch Verschiebung und/oder Streckung von Funktionen ($f_t(x) = f(x+t)$, $f_t(x) = t\cdot f(x)$ usw.). Für Parameterfunktionen gelten alle mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Differential- und Integralrechnung.
Es kommt daher auch vor, dass sich alle Parameterfunktionen $f_t(x)$ in gemeinsamen (Schnitt-) Punkten $S(x_0|y_0)$ schneiden, so dass gilt: $y_0 = f_t(x_0)$ für alle Parameter t der Funktionenschar. Zum

Nachweis eines Schnittpunktes S ist dabei der Schnittpunkt durch Gleichsetzen von zwei beliebigen Parameterfunktionen zu ermitteln, also mit t = a und t = b, a≠b, die Gleichung:

$$f_a(x) = f_b(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen. Ist $x = x_0$ eine Lösung der Gleichung (*), so ergibt das Einsetzen von x_0 in $f_t(x)$, die y-Koordinate des Schnittpunktes:

$$f_t(x_0) = y_0 \quad (**)$$

Gelten die Beziehungen (*) und (**), so ist der Schnittpunkt S der gemeinsame Punkt aller Parameterfunktionen $f_t(x)$ der Funktionenschar.

II. Es seien also für die beliebige Parameter t = a und t = b, a≠b, zunächst die Parameterfunktionen:

$f_a(x) = x^3 – (2a+1)x^2 + (2a–20)x + 40a$
$f_b(x) = x^3 – (2b+1)x^2 + (2b–20)x + 40b$

zu bilden. Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt die (quadratische) Gleichung mit den Gleichungsumformungen:

$f_a(x) = f_b(x)$	
$x^3 – (2a+1)x^2 + (2a–20)x + 40a = x^3 – (2b+1)x^2 + (2b–20)x + 40b$	$\mid -x^3$
$-(2a+1)x^2 + (2a–20)x + 40a = -(2b+1)x^2 + (2b–20)x + 40b$	(Klammern auflösen)
$-2ax^2 + x^2 + 2ax – 20x + 40a = -2bx^2 + x^2 + 2bx – 20x + 40b$	$\mid -x^2$
$-2ax^2 + 2ax – 20x + 40a = -2bx^2 + 2bx – 20x + 40b$	$\mid +20x$
$-2ax^2 + 2ax + 40a = -2bx^2 + 2bx + 40b$	$\mid +2bx^2$
$2bx^2 – 2ax^2 + 2ax + 40a = 2bx + 40b$	$\mid -2bx$
$2bx^2 – 2ax^2 + 2ax – 2bx + 40a = 40b$	$\mid -40b$
$2bx^2 – 2ax^2 + 2ax – 2bx + 40a – 40b = 0$	(Ausklammern)
$2(b–a)x^2 + 2(a–b)x + 40(a–b) = 0$	$\mid :(a–b) \neq 0$ (wegen: a≠b)
$-2x^2 + 2x + 40 = 0$	$\mid :(-2)$
$x^2 – x – 20 = 0$	(abc-Formel: a = 1, b = -1, c = -20)

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$x_1 = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$, $x_2 = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Es ergeben sich als gemeinsame Schnittpunkte der Funktionen $f_t(x)$ wegen:

$f_t(-4) = (-4)^3 – (2t+1)\cdot(-4)^2 + (2t–20)\cdot(-4) + 40a = -64 – 32t – 16 – 8t + 80 + 40a =$
$-80 – 40t + 80 + 40a = 0$
$f_t(5) = 5^3 – (2t+1)\cdot 5^2 + (2t–20)\cdot 5 + 40a = 125 – 50t – 25 + 10t – 100 + 40a =$
$100 – 40t – 100 + 40t = 0$

die Punkte $S_1(-4|0)$, $S_2(5|0)$, die gleichzeitig Nullstellen der Parameterfunktionen sind.

www.michael-buhlmann.de / 02.2020 / Aufgabe 971