Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ganz rationale Funktionen 3. Grades

Aufgabe: Zeige: Für jede ganz rationale Funktion 3. Grades f(x) gilt:

a) f(x) besitzt genau einen Wendepunkt.
b) f(x) ist punktsymmetrisch bzgl. des Wendepunktes.

Lösung: a) I. Jede ganz rationale Funktion 3. Grades f(x) ist von der Form:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$.

Für die Ableitungen gilt dann:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$
$f'''(x) = 6a$.

II. Die Bestimmung eines Wendepunktes erfolgt mit Hilfe der 2. Ableitung. Es gilt (notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes):

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow 6ax = -2b \Leftrightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$,

so dass an der Stelle $x_W = -\frac{b}{3a}$ in der Tat ein Wendepunkt vorliegt vermöge der 3. Ableitung (hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes):

$f'''(x_W) = f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \neq 0$.

Es liegt nicht zuletzt auf Grund der linearen Gleichung $f''(x) = 0$ also genau ein Wendepunkt der ganz rationalen Funktion 3. Grades vor. Der Funktionswert $f(x_W)$ an der Stelle $x_W = -\frac{b}{3a}$ errechnet sich als:

$$f(x_W) = f(-\frac{b}{3a}) = a\cdot(-\frac{b}{3a})^3 + b\cdot(-\frac{b}{3a})^2 + c\cdot(-\frac{b}{3a}) + d =$$
$$-a\cdot\frac{b^3}{27a^3} + b\cdot\frac{b^2}{9a^2} - c\cdot\frac{b}{3a} + d = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{9abc}{27a^2} + \frac{27a^2d}{27a^2} =$$
$$\frac{-b^3 + 3b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}.$$

Der Wendepunkt hat also das Aussehen: $W(-\frac{b}{3a} \mid \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2})$.

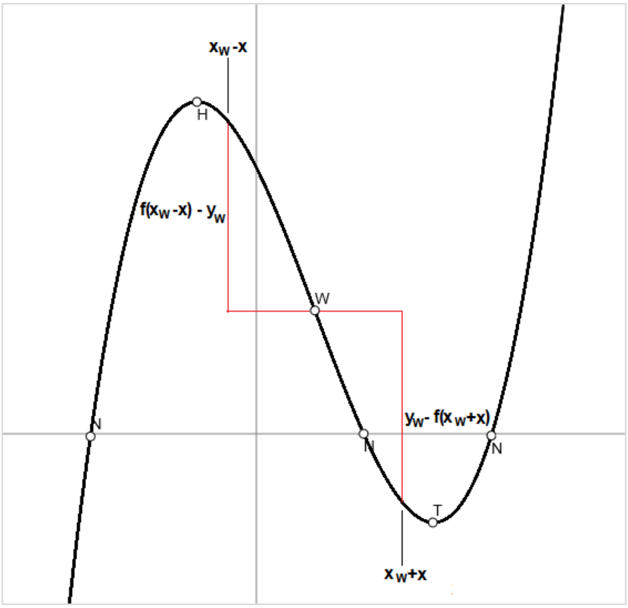
b) I. Eine Funktion f(x) heißt punktsymmetrisch zu einem Punkt $Z(x_z|y_z)$, wenn gilt:

$f(x_z-x) - y_z = y_z - f(x+x_z)$ (*).

Die Beziehung (*) lässt sich umformen zu:

$f(x_z+x) + f(x_z+x) = 2y_z$ (**),

was einfacher zu handhaben ist. Es wird daher im Folgenden mit der Gleichung (**) gerechnet.



II. Bei der ganz rationalen Funktion 3. Grades f(x) $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, soll Punktsymmetrie bzgl. des Wendepunktes $W(-\frac{b}{3a} \mid \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2})$ bestehen. Mit $x_z = x_W = -\frac{b}{3a}$ und $y_z = f(x_W) = f(-\frac{b}{3a}) = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$ gilt in der Tat die Gleichung (**) u.a. bei Verwendung des binomischen Lehrsatzes ($(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$; $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$) auf der Grundlage der folgenden Berechnungen:

$$(1) = f(x_z - x) = f(-\frac{b}{3a} - x) = a\cdot(-\frac{b}{3a} - x)^3 + b\cdot(-\frac{b}{3a} - x)^2 + c\cdot(-\frac{b}{3a} - x) + d =$$

$$-a\cdot(x + \frac{b}{3a})^3 + b\cdot(x + \frac{b}{3a})^2 - c\cdot(x + \frac{b}{3a}) =$$

$$-a\cdot\left(x^3 + 3x^2\frac{b}{3a} + 3x\frac{b^2}{9a^2} + \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\cdot\left(x^2 + 2x\frac{b}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) - c\cdot\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d =$$

$$-ax^3 - bx^2 - \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + bx^2 + \frac{2b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} - cx - \frac{bc}{3a} + d = -ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + \frac{2b^2}{3a} - c\right)x + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

$$(2) = f(x_z + x) = f(-\frac{b}{3a} + x) = a\cdot(-\frac{b}{3a} + x)^3 + b\cdot(-\frac{b}{3a} + x)^2 + c\cdot(-\frac{b}{3a} + x) + d =$$

$$a\cdot(x - \frac{b}{3a})^3 + b\cdot(x - \frac{b}{3a})^2 + c\cdot(x - \frac{b}{3a}) + d =$$

$$a\cdot\left(x^3 - 3x^2\frac{b}{3a} + 3x\frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\cdot\left(x^2 - 2x\frac{b}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\cdot\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d =$$

$$ax^3 - bx^2 + \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + bx^2 - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{bc}{3a} + d = ax^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)x + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

=>

$f(x_z - x) + f(x_z + x) = (1) + (2) =$

$$-ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + \frac{2b^2}{3a} - c\right)x + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d + ax^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)x + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d =$$

$$(-a + a)x^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + \frac{2b^2}{3a} - c + \frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)x + \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2bc}{3a} + 2d = \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2bc}{3a} + 2d =$$

$$\frac{4b^3 - 18abc + 54a^2d}{27a^2} = 2\cdot\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = 2y_z.$$

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 987