

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Funktionenscharen

---

**Aufgabe:** Gegeben ist die Funktionenschar des natürlichen Logarithmus:

$$f_a(x) = \ln(x) - ax, \quad x > 0$$

mit reellem Parameter  $a > 0$ . Untersuche die Funktionenschar auf die Existenz von Nullstellen.

**Lösung:** I. Allgemein gilt: Funktionenscharen (Funktionen mit Parametern, Parameterfunktionen) entstehen, wenn Funktionsgleichungen zur Funktionsvariablen  $x$  zusätzlich reelle Parameter  $t$  enthalten, wenn also:  $f_a(x) = f(x, a)$  mit einer beliebigen, aber festen Zahl  $a$  gilt. Die Kurven  $f_a(x)$  mit den vorgegebenen reellen  $a$  stellen die Funktionenschar grafisch dar, etwa als „Funktionenbündel“ oder als Schar zueinander paralleler Funktionen (z.B. bei Stammfunktionen). Funktionenscharen entstehen auch durch Verschiebung und/oder Streckung von Funktionen ( $f_a(x) = f(x+t)$ ,  $f_a(x) = a \cdot f(x)$  usw.). Für Parameterfunktionen gelten alle mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Differential- und Integralrechnung.

II. Da die Gleichung für die Nullstellen  $f_a(x) = \ln(x) - ax = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = ax$  elementar nicht lösbar ist und es gemäß der Aufgabenstellung nur um die vom Parameter  $a$  abhängige Anzahl der Nullstellen der Funktionen  $f_a(x)$  geht, schließen wir in unsere Betrachtung die eventuelle Existenz von Extrempunkten von  $f_a(x)$  ein. Zu deren Bestimmung bilden wir die ersten zwei Ableitungen:

$$f_a(x) = \ln(x) - ax$$

$$f_a'(x) = 1/x - a$$

$$f_a''(x) = -1/x^2.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf eine Stelle, an der der Funktionsgraph eine waagerechte Tangente besitzt:

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 1/x - a = 0 \Leftrightarrow 1/x = a \Leftrightarrow x = 1/a.$$

Einsetzen von  $x = 1/a$  in die 2. Ableitung ergibt:  $f_a''(1/a) = -1/(1/a)^2 = -a^2 < 0$ , so dass ein Hochpunkt der Funktion  $f_a(x)$  vorliegt. Die  $y$ -Koordinate des Hochpunkts errechnet sich als:

$$f_a(1/a) = \ln(1/a) - a \cdot 1/a = -\ln(a) - 1 = -(\ln(a)+1).$$

Für jedes  $a > 0$  ergibt sich mithin ein Hochpunkt  $H_a(1/a | -(\ln(a)+1))$  der Funktion  $f_a(x)$ .

III. Wegen  $x \rightarrow 0: f_a(x) \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty: f_a(x) \rightarrow -\infty$  (Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs  $D_f = (0; +\infty)$ ) gibt es Nullstellen der Funktion  $f_a(x)$  nur dann, wenn der Hochpunkt  $H_a$  oberhalb oder auf der  $x$ -Achse liegt. Es ist also die Nichtnegativität der  $y$ -Koordinate des Hochpunkts und damit:  $-(\ln(a)+1) \geq 0$  zu fordern. Wir rechnen die dazugehörige Gleichung aus:

$$-(\ln(a)+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(a)+1 = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = -1 \Leftrightarrow a = e^{-1} = 1/e$$

und haben hinsichtlich unserer Fragestellung nach der Existenz von Nullstellen:

$a > 1/e \Rightarrow$  keine Nullstelle der Funktion  $f_a(x)$

$a = 1/e \Rightarrow$  eine Nullstelle  $x = e$  der Funktion  $f_{1/e}(x)$  mit:  $f_{1/e}(e) = \ln(e) - e/e = 1 - 1 = 0$

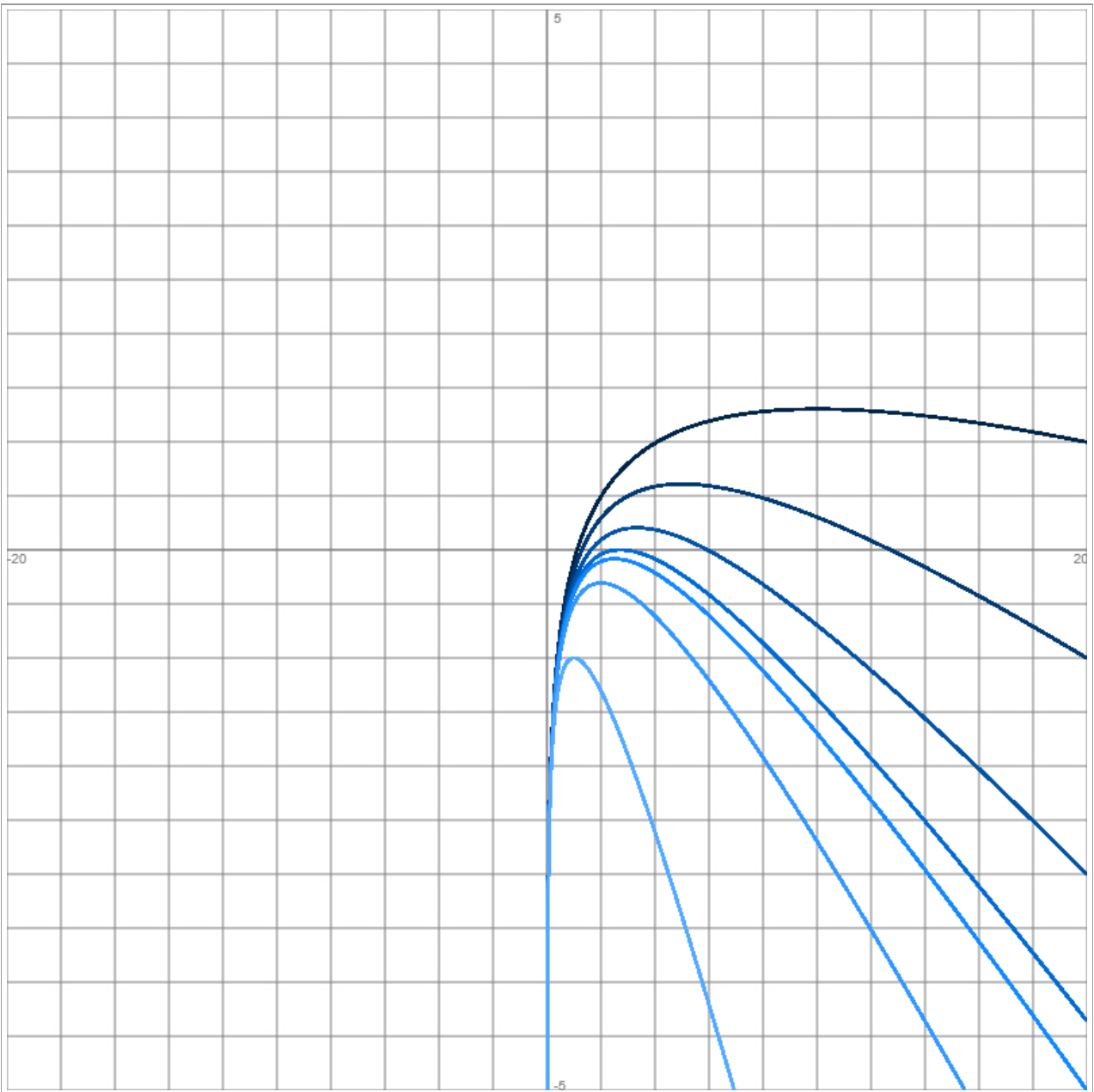
$a < 1/e \Rightarrow$  zwei Nullstellen der Funktion  $f_a(x)$ .

Nur für den Fall  $a = 1/e$  ist die einzige Nullstelle exakt nachweisbar.

IV. Die Funktionenschar  $f_a(x) = \ln(x) - ax$  (für  $a = 0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 1/e, 0,4, 0,5, 1$ ) ist nachfolgend erfasst in der Wertetabelle und als Graphen:

Wertetabelle:							
x	$f_{0,1}(x)$	$f_{0,2}(x)$	$f_{0,3}(x)$	$F_{1/e}(x)$	$f_{0,4}(x)$	$f_{0,5}(x)$	$f_1(x)$
0	-	-	-	-	-	-	-
0.5	-0.7431	-0.7931	-0.8431	-0.8771	-0.8931	-0.9431	-1.1931
1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3679	-0.4	-0.5	-1
1.5	0.2555	0.1055	-0.0445	-0.1464	-0.1945	-0.3445	-1.0945
2	0.4931	0.2931	0.0931	-0.0426	-0.1069	-0.3069	-1.3069
2.5	0.6663	0.4163	0.1663	-0.0034	-0.0837	-0.3337	-1.5837
3	0.7986	0.4986	0.1986	-0.005	-0.1014	-0.4014	-1.9014
3.5	0.9028	0.5528	0.2028	-0.0348	-0.1472	-0.4972	-2.2472
4	0.9863	0.5863	0.1863	-0.0852	-0.2137	-0.6137	-2.6137
4.5	1.0541	0.6041	0.1541	-0.1514	-0.2959	-0.7459	-2.9959
5	1.1094	0.6094	0.1094	-0.23	-0.3906	-0.8906	-3.3906
5.5	1.1547	0.6047	0.0547	-0.3186	-0.4953	-1.0453	-3.7953
6	1.1918	0.5918	-0.0082	-0.4155	-0.6082	-1.2082	-4.2082
6.5	1.2218	0.5718	-0.0782	-0.5194	-0.7282	-1.3782	-4.6282
7	1.2459	0.5459	-0.1541	-0.6292	-0.8541	-1.5541	-5.0541
7.5	1.2649	0.5149	-0.2351	-0.7442	-0.9851	-1.7351	-5.4851
8	1.2794	0.4794	-0.3206	-0.8636	-1.1206	-1.9206	-5.9206
8.5	1.2901	0.4401	-0.4099	-0.9869	-1.2599	-2.1099	-6.3599
9	1.2972	0.3972	-0.5028	-1.1137	-1.4028	-2.3028	-6.8028
9.5	1.3013	0.3513	-0.5987	-1.2436	-1.5487	-2.4987	-7.2487
10	1.3026	0.3026	-0.6974	-1.3762	-1.6974	-2.6974	-7.6974
10.5	1.3014	0.2514	-0.7986	-1.5114	-1.8486	-2.8986	-8.1486
11	1.2979	0.1979	-0.9021	-1.6488	-2.0021	-3.1021	-8.6021
11.5	1.2923	0.1423	-1.0077	-1.7883	-2.1577	-3.3077	-9.0577
12	1.2849	0.0849	-1.1151	-1.9297	-2.3151	-3.5151	-9.5151
12.5	1.2757	0.0257	-1.2243	-2.0728	-2.4743	-3.7243	-9.9743
13	1.2649	-0.0351	-1.3351	-2.2175	-2.6351	-3.9351	-10.4351
13.5	1.2527	-0.0973	-1.4473	-2.3637	-2.7973	-4.1473	-10.8973
14	1.2391	-0.1609	-1.5609	-2.5113	-2.9609	-4.3609	-11.3609
14.5	1.2241	-0.2259	-1.6759	-2.6601	-3.1259	-4.5759	-11.8259
15	1.2081	-0.2919	-1.7919	-2.8101	-3.2919	-4.7919	-12.2919
15.5	1.1908	-0.3592	-1.9092	-2.9613	-3.4592	-5.0092	-12.7592
16	1.1726	-0.4274	-2.0274	-3.1135	-3.6274	-5.2274	-13.2274
16.5	1.1534	-0.4966	-2.1466	-3.2667	-3.7966	-5.4466	-13.6966
17	1.1332	-0.5668	-2.2668	-3.4207	-3.9668	-5.6668	-14.1668
17.5	1.1122	-0.6378	-2.3878	-3.5757	-4.1378	-5.8878	-14.6378
18	1.0904	-0.7096	-2.5096	-3.7315	-4.3096	-6.1096	-15.1096
18.5	1.0678	-0.7822	-2.6322	-3.888	-4.4822	-6.3322	-15.5822
19	1.0444	-0.8556	-2.7556	-4.0453	-4.6556	-6.5556	-16.0556
19.5	1.0204	-0.9296	-2.8796	-4.2032	-4.8296	-6.7796	-16.5296
20	0.9957	-1.0043	-3.0043	-4.3619	-5.0043	-7.0043	-17.0043

Graphen:



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 10.2024 / Aufgabe 2251