

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x - 2$ ist zu bestimmen.

Lösung: I. Schnittpunkte: Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2 = x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$0 = 2x^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

also: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ als Schnittpunkte, d.h.: die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ begrenzen eine Fläche.

II. Wir bilden die Stammfunktion der Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = (-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2) = -2x^2 + 2x + 4$$

als:

$$H(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x.$$

III. Der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche errechnet sich dann als:

$$A = \left| \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \right| = \left| \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \right| = \left| \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) \right| = -6 + 12 + 3 = 9.$$

