Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Die von den beiden Funktionen $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ und $g(x)=\frac{1}{2}(x^3-5x^2+x+11)$ eingeschlossene Fläche ist zu bestimmen.

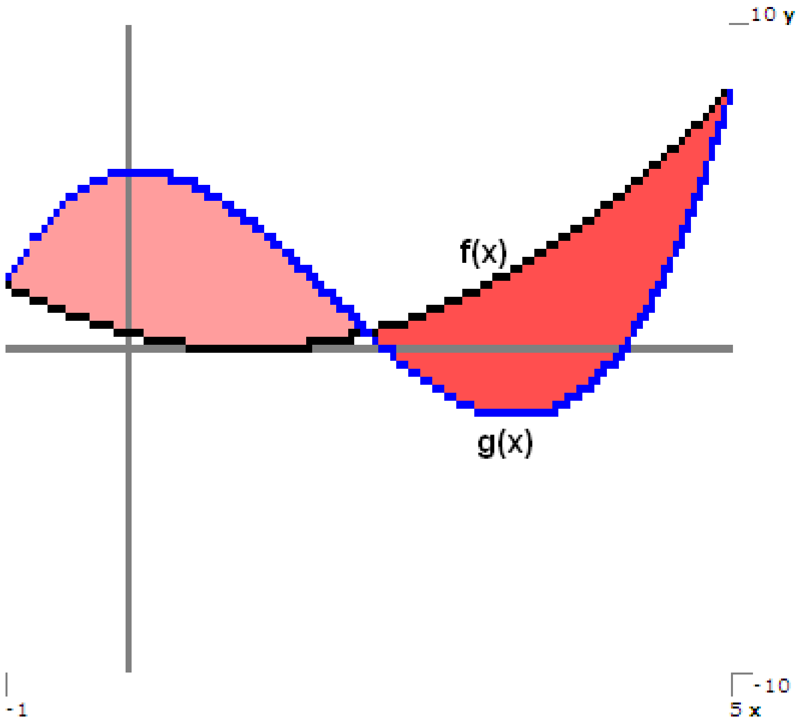
Lösung: I. <u>Schnittpunkte</u>: Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x+1=x^3-5x^2+x+11$$
$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+3x+10=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-5)=0 \Leftrightarrow$$
$$x=-1 \vee x=2 \vee x=5$$

nach Erraten einer Nullstelle (etwa x=2) und Polynomdivision und damit die Schnittpunkte: x_1=-1, x_2=2, x_3=5. Es sind also zwei Teilflächen zwischen den Funktionen f(x) und g(x) vorhanden.

II. Wir bilden die <u>Stammfunktion der Differenzfunktion</u> als unbestimmtes Integral:

$$H(x)=\int (f(x)-g(x))dx=\frac{1}{2}\int\left[(x^2-2x+1)-(x^3-5x^2+x+11)\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[-x^3+6x^2-3x-10\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]$$



III. Der <u>Flächeninhalt der zwei eingeschlossenen Teilflächen</u> errechnet sich dann als:

Teilfläche A_1:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{2}(-x^3+6x^2-3x-10)dx\right| = \frac{1}{2}\left|\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_{-1}^{2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(-4+16-6-10)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-2-\frac{3}{2}+10\right)\right| = \frac{81}{8}$$

Teilfläche A_2:

$$A_2 = \frac{1}{2}\left|\int_{2}^{5}(-x^3+6x^2-3x-10)dx\right| = \frac{1}{2}\left|\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_{2}^{5}\right| = \frac{81}{8}$$

Die zwei Teilflächen sind gleich groß. Die <u>Gesamtfläche</u> A ist: $A = A_1 + A_2 = \frac{81}{4}$ groß.

07.2014 / Aufgabe 19