

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und der x-Achse im Intervall $[2; 5]$ ist zu bestimmen.

Lösung: I. Nullstellen: Es ergeben sich mit:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow [x = -1] \vee x = 3$$

als Nullstellen, wobei $x = -1$ außerhalb des zu betrachtenden Intervalls $[2; 5]$ liegt.

II. Stammfunktion: Aus $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ folgt eine Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

III. Flächeninhalt: Die zwei Teilflächen sind:

$$A_1 = \left| \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right]_2^3 \right| = \left| \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{4}{3} - 2 - 3 \right) \right| = \left| -\frac{5}{6} \right| = \frac{5}{6};$$

$$A_2 = \left| \int_3^5 \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right]_3^5 \right| = \left| \left(\frac{125}{6} - \frac{25}{2} - \frac{15}{2} \right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) \right| = \left| \frac{32}{6} \right| = \frac{32}{6}.$$

Die Gesamtfläche A ist somit: $A = A_1 + A_2 = \frac{5}{6} + \frac{32}{6} = \frac{37}{6}$.

